

**RAPPORT  
TECHNIQUE  
TECHNICAL  
REPORT**

**CEI  
IEC**

**TR 62095**

Première édition  
First edition  
2003-06

---

---

**Câbles électriques –  
Calcul de la capacité de transport de courant –  
Méthode des éléments finis**

**Electric cables –  
Calculations for current ratings –  
Finite element method**



Numéro de référence  
Reference number  
CEI/IEC/TR 62095:2003

## Numérotation des publications

Depuis le 1er janvier 1997, les publications de la CEI sont numérotées à partir de 60000. Ainsi, la CEI 34-1 devient la CEI 60034-1.

## Editions consolidées

Les versions consolidées de certaines publications de la CEI incorporant les amendements sont disponibles. Par exemple, les numéros d'édition 1.0, 1.1 et 1.2 indiquent respectivement la publication de base, la publication de base incorporant l'amendement 1, et la publication de base incorporant les amendements 1 et 2.

## Informations supplémentaires sur les publications de la CEI

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu par la CEI afin qu'il reflète l'état actuel de la technique. Des renseignements relatifs à cette publication, y compris sa validité, sont disponibles dans le Catalogue des publications de la CEI (voir ci-dessous) en plus des nouvelles éditions, amendements et corrigenda. Des informations sur les sujets à l'étude et l'avancement des travaux entrepris par le comité d'études qui a élaboré cette publication, ainsi que la liste des publications parues, sont également disponibles par l'intermédiaire de:

- Site web de la CEI ([www.iec.ch](http://www.iec.ch))
- Catalogue des publications de la CEI

Le catalogue en ligne sur le site web de la CEI ([http://www.iec.ch/searchpub/cur\\_fut.htm](http://www.iec.ch/searchpub/cur_fut.htm)) vous permet de faire des recherches en utilisant de nombreux critères, comprenant des recherches textuelles, par comité d'études ou date de publication. Des informations en ligne sont également disponibles sur les nouvelles publications, les publications remplacées ou retirées, ainsi que sur les corrigenda.

- IEC Just Published

Ce résumé des dernières publications parues ([http://www.iec.ch/online\\_news/justpub/jp\\_entry.htm](http://www.iec.ch/online_news/justpub/jp_entry.htm)) est aussi disponible par courrier électronique. Veuillez prendre contact avec le Service client (voir ci-dessous) pour plus d'informations.

- Service clients

Si vous avez des questions au sujet de cette publication ou avez besoin de renseignements supplémentaires, prenez contact avec le Service clients:

Email: [custserv@iec.ch](mailto:custserv@iec.ch)  
Tél: +41 22 919 02 11  
Fax: +41 22 919 03 00

## Publication numbering

As from 1 January 1997 all IEC publications are issued with a designation in the 60000 series. For example, IEC 34-1 is now referred to as IEC 60034-1.

## Consolidated editions

The IEC is now publishing consolidated versions of its publications. For example, edition numbers 1.0, 1.1 and 1.2 refer, respectively, to the base publication, the base publication incorporating amendment 1 and the base publication incorporating amendments 1 and 2.

## Further information on IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC, thus ensuring that the content reflects current technology. Information relating to this publication, including its validity, is available in the IEC Catalogue of publications (see below) in addition to new editions, amendments and corrigenda. Information on the subjects under consideration and work in progress undertaken by the technical committee which has prepared this publication, as well as the list of publications issued, is also available from the following:

- IEC Web Site ([www.iec.ch](http://www.iec.ch))
- Catalogue of IEC publications

The on-line catalogue on the IEC web site ([http://www.iec.ch/searchpub/cur\\_fut.htm](http://www.iec.ch/searchpub/cur_fut.htm)) enables you to search by a variety of criteria including text searches, technical committees and date of publication. On-line information is also available on recently issued publications, withdrawn and replaced publications, as well as corrigenda.

- IEC Just Published

This summary of recently issued publications ([http://www.iec.ch/online\\_news/justpub/jp\\_entry.htm](http://www.iec.ch/online_news/justpub/jp_entry.htm)) is also available by email. Please contact the Customer Service Centre (see below) for further information.

- Customer Service Centre

If you have any questions regarding this publication or need further assistance, please contact the Customer Service Centre:

Email: [custserv@iec.ch](mailto:custserv@iec.ch)  
Tel: +41 22 919 02 11  
Fax: +41 22 919 03 00

**RAPPORT  
TECHNIQUE  
TECHNICAL  
REPORT**

**CEI  
IEC**

**TR 62095**

Première édition  
First edition  
2003-06

---

---

**Câbles électriques –  
Calcul de la capacité de transport de courant –  
Méthode des éléments finis**

**Electric cables –  
Calculations for current ratings –  
Finite element method**

© IEC 2003 Droits de reproduction réservés — Copyright - all rights reserved

Aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de l'éditeur.

No part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from the publisher.

International Electrotechnical Commission, 3, rue de Varembé, PO Box 131, CH-1211 Geneva 20, Switzerland  
Telephone: +41 22 919 02 11 Telefax: +41 22 919 03 00 E-mail: inmail@iec.ch Web: www.iec.ch



Commission Electrotechnique Internationale  
International Electrotechnical Commission  
Международная Электротехническая Комиссия

CODE PRIX  
PRICE CODE

**V**

*Pour prix, voir catalogue en vigueur  
For price, see current catalogue*

## SOMMAIRE

|                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| AVANT-PROPOS .....                                                                                                                   | 6  |
| 1 Introduction.....                                                                                                                  | 8  |
| 1.1 Généralités .....                                                                                                                | 8  |
| 1.2 Champ d'application .....                                                                                                        | 10 |
| 1.3 Informations obtenues par la méthode des éléments finis .....                                                                    | 12 |
| 1.4 Méthodes alternatives.....                                                                                                       | 12 |
| 2 Synthèse sur la méthode des éléments finis .....                                                                                   | 14 |
| 3 Considérations pratiques pour l'application de la méthode des éléments finis aux calculs de capacité de transport des câbles ..... | 22 |
| 3.1 Sélection de la région à discrétiser .....                                                                                       | 24 |
| 3.2 Taille des éléments.....                                                                                                         | 24 |
| 3.3 Conditions aux limites.....                                                                                                      | 28 |
| 3.4 Représentation des pertes du câble.....                                                                                          | 30 |
| 3.5 Sélection du pas de temps.....                                                                                                   | 30 |
| 4 Exemples d'application de la méthode des éléments finis pour l'évaluation des capacités de transport des câbles.....               | 32 |
| 4.1 Exemple 1 .....                                                                                                                  | 32 |
| 4.2 Exemple 2 .....                                                                                                                  | 34 |
| 4.3 Exemple 3 .....                                                                                                                  | 36 |
| Annexe A Développement des équations .....                                                                                           | 40 |
| A.1 Equations de transfert de la chaleur.....                                                                                        | 40 |
| A.2 Approximation des équations polynomiales.....                                                                                    | 42 |
| A.3 Equations de base de la méthode des éléments finis .....                                                                         | 44 |
| A.4 Exemples.....                                                                                                                    | 52 |
| Bibliographie .....                                                                                                                  | 66 |
| Figure 1 – Répartition de la température dans un aileron unidimensionnel .....                                                       | 16 |
| Figure 2 – Les points nodaux et les valeurs supposées de $\theta(x)$ .....                                                           | 16 |
| Figure 3 – Division du domaine en éléments .....                                                                                     | 18 |
| Figure 4 – Modèle discrétisé d'une distribution de température unidimensionnelle .....                                               | 20 |
| Figure 5 – Modélisation d'une fonction scalaire bi-dimensionnelle par l'utilisation d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux ..... | 22 |
| Figure 6 – Modélisation d'une fonction scalaire bi-dimensionnelle par l'utilisation d'un élément triangulaire quadratique .....      | 22 |
| Figure 7(a) – Exemple de 6 câbles dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, installation .....                                     | 26 |
| Figure 7(b) – Exemple de 6 câbles dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, maillage grossier.....                                 | 26 |
| Figure 7(c) – Exemple de 6 câbles dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, maillage fin .....                                     | 28 |
| Figure 7 – Exemple de maillage dans un modèle d'élément fini .....                                                                   | 28 |

## CONTENTS

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FOREWORD .....                                                                                            | 7  |
| 1 Introduction.....                                                                                       | 9  |
| 1.1 General .....                                                                                         | 9  |
| 1.2 Field of application .....                                                                            | 11 |
| 1.3 Information obtained from the finite element method.....                                              | 13 |
| 1.4 Alternative methods .....                                                                             | 13 |
| 2 Overview of the finite element method .....                                                             | 15 |
| 3 Practical considerations when applying the finite element method for cable rating calculations.....     | 23 |
| 3.1 Selection of the region to be discretised .....                                                       | 25 |
| 3.2 Element sizes .....                                                                                   | 25 |
| 3.3 Boundary conditions .....                                                                             | 29 |
| 3.4 Representation of cable losses .....                                                                  | 31 |
| 3.5 Selection of a time step .....                                                                        | 31 |
| 4 Examples of application of the finite element method for cable rating calculations .....                | 33 |
| 4.1 Example 1 .....                                                                                       | 33 |
| 4.2 Example 2 .....                                                                                       | 35 |
| 4.3 Example 3 .....                                                                                       | 37 |
| Annex A Development of equations.....                                                                     | 41 |
| A.1 Heat transfer equations.....                                                                          | 41 |
| A.2 Approximating polynomials .....                                                                       | 43 |
| A.3 Finite element equations.....                                                                         | 45 |
| A.4 Examples.....                                                                                         | 53 |
| Bibliography .....                                                                                        | 67 |
| Figure 1 – Temperature distribution in a one dimensional fin.....                                         | 17 |
| Figure 2 – The nodal points and the assumed values of $\theta(x)$ .....                                   | 17 |
| Figure 3 – Division of the domain into elements .....                                                     | 19 |
| Figure 4 – Discrete models for one-dimensional temperature distribution .....                             | 21 |
| Figure 5 – Modelling of a two-dimensional scalar function using triangular or quadrilateral elements..... | 23 |
| Figure 6 – Modelling of a two-dimensional scalar function using a quadratic triangular element.....       | 23 |
| Figure 7(a) – Example of 6 cables in a concrete duct bank, installation.....                              | 27 |
| Figure 7(b) – Example of 6 cables in a concrete duct bank, coarse mesh.....                               | 27 |
| Figure 7(c) – Example of 6 cables in a concrete duct bank, fine mesh.....                                 | 29 |
| Figure 7 – Example of meshing a finite element model.....                                                 | 29 |

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 8 – Relation entre le pas de temps, la courbe de charge et le temps écoulé depuis le début du transitoire .....                            | 32 |
| Figure 9 – Conditions de pose pour l'étude par éléments finis, exemple 1 .....                                                                    | 34 |
| Figure 10 – Installation de l'exemple 2 .....                                                                                                     | 36 |
| Figure 11 – Isothermes pour l'installation de la Figure 10 .....                                                                                  | 36 |
| Figure 12 – Câbles de forte section posés dans un caniveau à faible profondeur .....                                                              | 38 |
| Figure A.1 – Coordonnées locales .....                                                                                                            | 42 |
| Figure A.2 – Illustration de l'exemple A1 .....                                                                                                   | 52 |
| Figure A.3 – Isotherme 41°C .....                                                                                                                 | 54 |
| Figure A.4 – Illustration de l'exemple 3 .....                                                                                                    | 56 |
| Figure A.5 – Illustration de l'exemple 4 .....                                                                                                    | 58 |
| Figure A.6 – Configuration du circuit thermique de l'exemple 5 .....                                                                              | 62 |
| Figure A.7 – Structure du réseau d'éléments finis pour une couche extérieure à un bloc de fourreaux .....                                         | 62 |
| Tableau 1 – Comparaison des résultats obtenus à l'aide de la CEI 60287 et avec la méthode des éléments finis pour les câbles de l'exemple 1 ..... | 34 |
| Tableau 2 – Température de l'âme du câble obtenue avec la CEI 60287 et avec des méthodes aux éléments finis .....                                 | 38 |

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC TR 62095:2003

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 8 – Relationship between the time step, the load curve and the time elapsed from the beginning of the transient ..... | 33 |
| Figure 9 – Laying conditions for the finite element study in example 1.....                                                  | 35 |
| Figure 10 – Installation for example 2.....                                                                                  | 37 |
| Figure 11 – Isotherms for the system in Figure 10.....                                                                       | 37 |
| Figure 12 – Large cables located in a shallow through .....                                                                  | 39 |
| Figure A.1 – Area co-ordinates.....                                                                                          | 43 |
| Figure A.2 – Illustration for example A1.....                                                                                | 53 |
| Figure A.3 – 41°C isothermal contour.....                                                                                    | 55 |
| Figure A.4 – Illustration for example 3.....                                                                                 | 57 |
| Figure A.5 – Illustration to example 4 .....                                                                                 | 59 |
| Figure A.6 – Thermal circuit configuration in example 5 .....                                                                | 63 |
| Figure A.7 – Finite element grid structure for a outer layer of a duct bank .....                                            | 63 |
| Table 1 – Comparison of the IEC 60287 and the finite element results for cables in example 1 .....                           | 35 |
| Table 2 – Conductor temperature of the middle cable obtained with the IEC 60287 and the finite element methods .....         | 39 |

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC TR 62095:2003

# COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

## CÂBLES ÉLECTRIQUES – CALCUL DE LA CAPACITÉ DE TRANSPORT DE COURANT – MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

### AVANT-PROPOS

- 1) La CEI (Commission Électrotechnique Internationale) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). La CEI a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI, entre autres activités, publie des Normes internationales. Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec la CEI, participent également aux travaux. La CEI collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
- 2) Les décisions ou accords officiels de la CEI concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
- 3) Les documents produits se présentent sous la forme de recommandations internationales. Ils sont publiés comme normes, spécifications techniques, rapports techniques ou guides et agréés comme tels par les Comités nationaux.
- 4) Dans le but d'encourager l'unification internationale, les Comités nationaux de la CEI s'engagent à appliquer de façon transparente, dans toute la mesure possible, les Normes internationales de la CEI dans leurs normes nationales et régionales. Toute divergence entre la norme de la CEI et la norme nationale ou régionale correspondante doit être indiquée en termes clairs dans cette dernière.
- 5) La CEI n'a fixé aucune procédure concernant le marquage comme indication d'approbation et sa responsabilité n'est pas engagée quand un matériel est déclaré conforme à l'une de ses normes.
- 6) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Norme internationale peuvent faire l'objet de droits de propriété intellectuelle ou de droits analogues. La CEI ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de propriété et de ne pas avoir signalé leur existence.

La tâche principale des comités d'études de la CEI est l'élaboration des Normes internationales. Toutefois, un comité d'études peut proposer la publication d'un rapport technique lorsqu'il a réuni des données de nature différente de celles qui sont normalement publiées comme Normes internationales, cela pouvant comprendre, par exemple, des informations sur l'état de la technique.

La CEI 62095, qui est un rapport technique, a été établie par le comité d'études 20 de la CEI: Câbles électriques.

Le texte de ce rapport technique est issu des documents suivants:

| Projet d'enquête | Rapport de vote |
|------------------|-----------------|
| 20/600/DTR       | 20/634/RVC      |

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de ce rapport technique.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/CEI, Partie 2.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant 2014. A cette date, la publication sera

- reconduite;
- supprimée;
- remplacée par une édition révisée, ou
- amendée.



## INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

**ELECTRIC CABLES –  
CALCULATIONS FOR CURRENT RATINGS –  
FINITE ELEMENT METHOD**

## FOREWORD

- 1) The IEC (International Electrotechnical Commission) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of the IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, the IEC publishes International Standards. Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. The IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
- 2) The formal decisions or agreements of the IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested National Committees.
- 3) The documents produced have the form of recommendations for international use and are published in the form of standards, technical specifications, technical reports or guides and they are accepted by the National Committees in that sense.
- 4) In order to promote international unification, IEC National Committees undertake to apply IEC International Standards transparently to the maximum extent possible in their national and regional standards. Any divergence between the IEC Standard and the corresponding national or regional standard shall be clearly indicated in the latter.
- 5) The IEC provides no marking procedure to indicate its approval and cannot be rendered responsible for any equipment declared to be in conformity with one of its standards.
- 6) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this technical report may be the subject of patent rights. The IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

The main task of IEC technical committees is to prepare International Standards. However, a technical committee may propose the publication of a technical report when it has collected data of a different kind from that which is normally published as an International Standard, for example "state of the art".

IEC 62095, which is a technical report, has been prepared by IEC technical committee 20: Electric cables.

The text of this technical report is based on the following documents:

|               |                  |
|---------------|------------------|
| Enquiry draft | Report on voting |
| 20/600/DTR    | 20/634/RVC       |

Full information on the voting for the approval of this technical report can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 2.

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until 2014. At this date, the publication will be

- reconfirmed;
- withdrawn;
- replaced by a revised edition, or
- amended.

# **CÂBLES ÉLECTRIQUES – CALCUL DE LA CAPACITÉ DE TRANSPORT DE COURANT – MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS**

## **1 Introduction**

### **1.1 Généralités**

Dans les calculs de capacité de transport des câbles, les aspects les plus importants sont la détermination de la température de l'âme du câble lorsqu'il est soumis à une charge donnée ou, inversement, l'évaluation de l'intensité du courant admissible pour une température d'âme donnée. Il faut donc déterminer la chaleur produite à l'intérieur du câble et sa dissipation à l'extérieur, pour un matériau d'âme et un courant de charge donné. La capacité du milieu environnant le câble à dissiper la chaleur est un élément de toute première importance pour ces calculs; elle est susceptible de varier largement en raison de différents facteurs tels que la composition et le taux d'humidité du sol ou la température ambiante et les conditions de vent. Les modes de transfert de chaleur du câble vers son environnement sont multiples. Pour les liaisons souterraines, le transfert de chaleur à partir de l'âme, l'isolation, les écrans et autres parties métalliques, se fait par conduction. Les modalités de dissipation de la chaleur sont quantifiables grâce à l'équation de transmission de la chaleur décrite à l'Annexe A (équation A.1).

Les calculs de capacité de transport des câbles de puissance demandent la résolution des équations de transmission de la chaleur, qui constituent une relation fonctionnelle entre l'intensité du courant écoulé par le câble et la température à l'intérieur du câble et dans son environnement. La résolution analytique de ces équations se heurte souvent à la difficulté du calcul de la distribution des températures dans le sol entourant le câble. Une résolution satisfaisante est possible analytiquement lorsque le câble est assimilé à une source à section nulle placée dans un milieu homogène et infini. Cette hypothèse n'étant pas vérifiée dans les configurations d'installation réelles, une hypothèse alternative est souvent soulevée, à savoir celle de l'isothermie de la surface du sol. En pratique, la profondeur de pose est de l'ordre d'une dizaine de fois le diamètre des câbles, et, dans la plage habituelle de températures atteintes par les câbles, l'hypothèse de l'isothermie de la surface du sol est acceptable. Pour les cas où cette hypothèse n'est pas réalisée, notamment pour les câbles à fort diamètre ou les câbles enterrés à faible profondeur, il est nécessaire d'appliquer des coefficients correctifs ou d'utiliser les méthodes de calcul numérique.

Lorsque la surface du sol est supposée isotherme, les équations de conduction de la chaleur en régime permanent peuvent être résolues en admettant que le câble est posé dans un milieu homogène semi-infini.

Les méthodes de résolution des équations de conduction de la chaleur sont décrites dans la CEI 60287 (régime permanent)<sup>1</sup> et la CEI 60853 (régime cyclique), et permettent de résoudre la plupart des problèmes posés dans la pratique. Lorsque ces méthodes sont inapplicables, les équations de conduction de la chaleur peuvent être résolues par des approches numériques. Parmi ces approches, la méthode des éléments finis présentée dans ce document, se prête particulièrement bien à l'analyse des câbles souterrains. Les cas où il est recommandé d'utiliser la méthode des éléments fins sont présentés ci-dessous.

---

<sup>1</sup> La CEI 60287 a été retirée et remplacée par une série de publications (voir [2] de la Bibliographie).

## **ELECTRIC CABLES – CALCULATIONS FOR CURRENT RATINGS – FINITE ELEMENT METHOD**

### **1 Introduction**

#### **1.1 General**

The most important tasks in cable current rating calculations are the determination of the conductor temperature for a given current loading or, conversely, the determination of the tolerable load current for a given conductor temperature. In order to perform these tasks the heat generated within the cable and the rate of its dissipation away from the conductor, for a given conductor material and given load, must be calculated. The ability of the surrounding medium to dissipate heat plays a very important role in these determinations and varies widely because of factors such as soil composition, moisture content, ambient temperature and wind conditions. The heat is transferred through the cable and its surroundings in several ways. For underground installations the heat is transferred by conduction from the conductor, insulation, screens and other metallic parts. It is possible to quantify the heat transfer processes in terms of the appropriate heat transfer equation as shown in Annex A (equation A.1).

Current rating calculations for power cables require a solution of the heat transfer equations which define a functional relationship between the conductor current and the temperature within the cable and its surroundings. The challenge in solving these equations analytically often stems from the difficulty of computing the temperature distribution in the soil surrounding the cable. An analytical solution can be obtained when a cable is represented as a line source placed in an infinite homogenous surrounding medium. Since this is not a practical assumption for cable installations, another assumption is often used; namely, that the earth surface is an isotherm. In practical cases, the depth of burial of the cables is in the order of ten times their external diameter, and for the usual temperature range reached by such cables, the assumption of an isothermal earth surface is a reasonable one. In cases where this hypothesis does not hold; namely, for large cable diameters and cables located close to the ground surface, a correction to the solution has to be used or numerical methods should be applied.

With the isothermal surface boundary, the steady-state heat conduction equations can be solved assuming that the cable is located in a uniform semi-infinite medium.

Methods of solving the heat conduction equations are described in IEC 60287 (steady-state conditions)<sup>1</sup> and IEC 60853 (cyclic conditions), for most practical applications. When these methods cannot be applied, the heat conduction equations can be solved using numerical approaches. One such approach, particularly suitable for the analysis of underground cables, is the finite element method presented in this document. The cases when the use of the finite element method is recommended are discussed next.

---

<sup>1</sup> IEC 60287 has been withdrawn and replaced by a series of publications (see item 2 of the Bibliography).

## 1.2 Champ d'application

Pour les calculs classiques des capacités de transport des câbles, l'équation de conduction de la chaleur est résolue à l'aide de plusieurs hypothèses simplificatrices [1]<sup>2</sup>, ce qui limite le champ d'applicabilité des méthodes analytiques. Quelques exemples suffisent à démontrer ces limites. Pour ce qui est des méthodes analytiques décrites dans la CEI 60287 [2], la CEI 60853-1 [3] et la CEI 60853-2 [4], le cas d'un groupe de câbles est traité en appliquant le principe restreint de superposition. Cela suppose que la présence d'un autre câble, même hors charge, ne perturbe pas le flux de chaleur du premier câble, ni la production de chaleur en son sein. Il est alors possible de mener des calculs séparés pour chaque câble: l'échauffement de chaque câble est la somme algébrique des échauffements qu'il génère lui-même et des échauffements dus aux autres câbles. Cette procédure donne des résultats acceptables lorsque les câbles ne sont pas en contact les uns avec les autres. Dans les cas où cette condition n'est pas réalisée, par exemple lorsque les câbles sont posés jointifs, l'échauffement provoqué par la charge simultanée de tous les câbles doit être prise en considération. La méthode des éléments finis, qui résout directement l'équation de conduction de la chaleur permet une telle possibilité.

Les méthodes numériques permettent également une modélisation plus précise des frontières entre différents milieux, par exemple la prise en compte d'échanges par convection à la surface du sol ou la spécification de flux de chaleur constants sur des surfaces circulaires pour les tuyaux de chaleur ou d'eau à proximité des câbles ou encore une surface isotherme correspondant au niveau de l'eau en fond de tranchée. Ainsi, en cas de non-vérification de l'hypothèse d'une limite isotherme, par exemple pour des câbles posés dans des caniveaux de surface ou enfouis à faible profondeur dans le sol, la méthode des éléments finis est un outil adapté aux besoins de l'analyse thermique.

L'inadaptation des approximations des méthodes analytiques est particulièrement évidente lorsque le milieu entourant le câble est constitué de plusieurs matériaux de résistances thermiques différentes. La Figure 2 en donne un exemple. Il s'agit d'une installation réelle caractérisée non seulement par la diversité des caractéristiques du sol, mais aussi par une limite convective verticale. Cette association de conditions complexes (sol non homogène et limites non isothermes) est aisément prise en compte par la méthode des éléments finis. L'efficacité de cette méthode de calcul est également très satisfaisante: la puissance de traitement des micro-ordinateurs du marché permet de résoudre en quelques minutes des problèmes portant sur des maillages comprenant plusieurs milliers de nœuds.

Il y a un autre avantage à employer la méthode des éléments finis pour l'analyse des transitoires. La démarche analytique appliquée aux transitoires est décrite dans la CEI 60853-1 et la CEI 60853-2: des calculs séparés sont effectués pour les composants internes du câble et pour son environnement. La relation entre les circuits thermiques interne et externe est établie en supposant que le flux de chaleur dans le sol est proportionnel au facteur de réalisation du transfert entre l'âme du câble et sa surface externe. La validité de ces méthodes ne repose pas sur un fondement théorique mais sur la simple concordance, empiriquement constatée, entre les réponses obtenues en utilisant la modélisation thermique recommandée, et les transitoires de température calculés par des méthodes de calcul par ordinateur, plus sophistiquées mais plus précises. La méthode des éléments finis propose, dans ce cas également, une solution qui demande un minimum d'hypothèses simplificatrices.

Il est à noter que les valeurs retenues pour la résistivité thermique du sol et de sa température ont une influence non négligeable sur tous les calculs de capacité de transport ou de température du câble. Dans de nombreux cas, il n'y a rien à gagner à utiliser une méthode de calcul "plus précise", en cas d'absence de données certaines concernant les caractéristiques réelles du sol.

<sup>2</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie.

## 1.2 Field of application

In classical cable rating calculations, the heat conduction equation is solved under several simplifying assumptions [1]<sup>2</sup>. This limits the field of the applicability of the analytical methods. The limitations of the classical methods will be apparent from a few examples. In the analytical methods described in IEC 60287 [2], IEC 60853-1 [3] and IEC 60853-2 [4], the case of a group of cables is dealt with on the basis of the restricted application of superposition. To apply this principle, it must be assumed that the presence of another cable, even if it is not loaded, does not disturb the heat flux path from the first cable, nor the generation of heat within it. This allows separate computations to be performed for each cable with the final temperature rise being an algebraic sum of the temperature rises due to cable itself and the rise caused by the other cables. Such a procedure is reasonably correct when the cables are separated from each other. When this is not the case, for example for cables in touching formation, the temperature rise caused by simultaneous operation of all cables should be considered. A direct solution of the heat conduction equation employing the finite element method offers such a possibility.

Numerical methods also permit more accurate modelling of the region's boundaries for example, a convective boundary at the earth surface, constant heat flux circular boundaries for heat or water pipes in the vicinity of the cables, or an isothermal boundary at the water level at the bottom of a trench. Thus, when an isothermal boundary cannot be assumed, for example, for cables installed in shallow troughs or directly buried not far from the ground surface, the finite element method provides a suitable tool for the thermal analysis.

Perhaps the most obvious case when the analytical approximations fail is when the medium surrounding the cable is composed of several materials having different thermal resistivities. Figure 2 shows an example of such situation. This is an actual cable installation where not only were several soil characteristics present, but also, a vertical convective boundary had to be dealt with. The non-uniform soil conditions and non-isothermal boundaries are handled easily by the finite element method. The computational efficiency of this approach is also quite satisfying. With presently available personal computers, calculations involving networks with several thousand nodes can be performed in a matter of minutes.

There are also advantages in using the finite element method in the transient analysis. The analytical approach for transient calculations is described in IEC 60853-1 and IEC 60853-2. In this document, separate computations are performed for the internal and the external parts of the cable. Coupling between internal and external circuits was achieved by assuming that the heat flow into the soil is proportional to the attainment factor of the transient between the conductor and the outer surface of the cable. The validity of the methods did not rest on an analytical proof, but on an empirical agreement of the responses given by the recommended circuits and the temperature transients calculated by more lengthy but more accurate computer-based methods. Here, again, the finite element method offers a solution with minimal simplifying assumptions.

It should be noted that the value selected for the thermal resistivity of the soil, and its temperature, will have a significant influence on any calculated current rating or cable temperature. In many cases there is little to be gained by using a 'more accurate' method of calculation if soil conditions are not known with a degree of certainty.

---

<sup>2</sup> Figures between brackets refer to the bibliography.

### 1.3 Informations obtenues par la méthode des éléments finis

Le problème usuel de la capacité de transport d'un câble est de calculer le courant admissible dans l'âme pour que la température maximale du conducteur ne dépasse pas une valeur spécifiée. Les méthodes numériques peuvent également servir à calculer la répartition de la température tant au sein du câble que dans son environnement, lorsque la chaleur dégagée par le câble est donnée (cela est particulièrement utile quand on a besoin de déterminer le champ de température et certaines isothermes autour du câble). A chaque fois, pour la détermination de la capacité de transport d'un câble, les méthodes numériques demandent une démarche itérative. On se fixe une valeur du courant dans l'âme et on calcule la température correspondante; puis la valeur du courant est ensuite ajustée par itérations successives jusqu'à ce que la température converge vers une valeur spécifiée, avec une certaine plage de tolérance.

Une explication de la méthode des éléments finis est donnée à l'Article 2; les données d'entrée nécessaires sont commentées à l'Article 3, et l'Article 4 présente plusieurs exemples où l'approche par la méthode des éléments finis est recommandée.

### 1.4 Méthodes alternatives

Bien que ce document se concentre sur l'utilisation des méthodes aux éléments finis pour évaluer la transmission de la chaleur au travers des matériaux entourant les câbles enterrés, d'autres méthodes peuvent être mises en œuvre: les méthodes aux différences finies, les méthodes aux intégrales de frontière ou de superposition, décrites dans Electra 87 [5], ainsi que les approches qui associent une transformation conforme à la méthode aux différences finies.

Les méthodes aux différences finies (MDF) sont souvent employées pour l'étude de la répartition des contraintes électriques dans les jonctions et les extrémités des câbles. Il a été démontré que la MDF est plus appropriée que la MEF pour la résolution des problèmes tri-dimensionnels, en raison des difficultés qui peuvent se présenter lorsque la MEF modélise en trois dimensions des objets allongés et de faible épaisseur, tels que des câbles. Néanmoins, la méthode MDF est fondée sur l'utilisation d'éléments rectangulaires, ce qui la rend mal adaptée à la modélisation des surfaces courbes.

Les méthodes aux intégrales de frontière sont moins lourdes en terme de définition des données d'entrée, et moins gourmandes en temps de calcul par ordinateur que la méthode des éléments finis, mais ne permettent pas l'analyse des transitoires.

La méthode de superposition, décrite dans Electra 87, pour calculer la réponse transitoire d'un câble unipolaire à un échelon thermique offre un certain nombre d'avantages par rapport à la méthode des éléments finis, notamment les suivants:

- a) elle demande relativement peu de données de modélisation (en général moins de 100 nœuds, par rapport à 1000 nœuds pour la MEF), ce qui la rend plus utile pour l'analyse en temps réel. Le champ unidimensionnel de la température peut être calculé par des méthodes numériquement stables, permettant ainsi l'utilisation de pas de temps relativement importants, sans introduction d'erreurs significatives;
- b) des méthodes approchées peuvent être développées pour prendre en compte deux matériaux différents de remblaiement d'une tranchée;
- c) elle peut être employée comme base du calcul des températures transitoires dans les problèmes en trois dimensions qui se posent dans les chambres de jonction et les systèmes de refroidissement forcé à eau;
- d) elle peut être utilisée pour le calcul de l'échauffement mutuel de câbles qui se croisent;
- e) elle permet de prendre en compte des propriétés des matériaux dépendant de la température, comme la résistance de l'âme, les pertes diélectriques et la résistivité thermique du sol.



### 1.3 Information obtained from the finite element method

The usual cable rating problem is to compute the permissible conductor current so that the maximum conductor temperature does not exceed a specified value. Numerical methods, on the other hand, are used to compute the temperature distribution within the cable and its surroundings given heat generated within the cable (this is particularly useful when we need to determine the temperature field and specific isotherms around the cable). However, when numerical methods are used to determine cable rating, an iterative approach has to be used for the purpose. This is accomplished by specifying a certain conductor current and calculating the corresponding conductor temperature. Then, the current is adjusted and the calculation repeated until the specified temperature is found convergent within a specified tolerance.

An explanation of the finite element method is given in Clause 2 followed by the discussion of input requirements in Clause 3. In Clause 4, several examples where the application of the finite element approach is advisable are presented.

### 1.4 Alternative methods

Although this report concentrates on the use of finite element methods for the calculation of heat transfer through the materials surrounding buried cables, other numerical methods are available. These include finite difference methods, boundary element methods, the superposition method described in Electra 87 [5] and the approaches combining conformal transformation and the finite difference method.

Finite difference methods (FDM) are frequently used in the study of electric stress distribution in cable joints and terminations. It has been shown that FDM is more suitable than FEM for three dimensional cable problems. This is because difficulties can arise when using FEM to model long thin objects, such as cables, in three dimensions. However, FDM is intended for use with rectangular elements and hence is not well suited for modelling curved surfaces.

Boundary element methods need less effort in defining the input data and use less computer time than FEM. However, transient analysis cannot be performed using boundary element methods.

The superposition method described in Electra 87 for the calculation of the response of single core cables to a step function thermal transient has a number of advantages over FEM. These include the following:

- a) it requires relatively little modelling data, typically less than 100 nodes compared with 1000 nodes for FEM. The method is therefore more suitable for real time rating systems. The one-dimensional temperature field can be derived using numerically stable methods. Hence, relatively large time steps can be used without introducing significant errors;
- b) approximate methods can be developed to use this approach when two different cable backfills exist;
- c) the method can be used as a basis for calculating transient temperatures for three dimensional problems such as occur in cable joint bays and systems with separate water cooling;
- d) it can be used to calculate mutual heating between crossing cables;
- e) it is suitable for studying the effect of temperature dependant material properties such as conductor resistance, dielectric losses and soil thermal resistivity.

Cependant, même si dans de nombreux cas la méthode de superposition permet l'analyse des contraintes de manière satisfaisante, elle ne résout pas les problèmes posés par l'existence d'un grand nombre de câbles disposés dans des configurations géométriques complexes.

L'approche dite de transformation conforme, proposée par le groupe de travail CIGRE WG 21.02, est décrite dans Electra 98 [6]. Germa et Mushamalirwa [7] ont comparé la méthode des éléments finis à quatre approches qui reposent sur la transformation conforme du plan Z perpendiculaire aux axes des câbles en un plan W, de manière à transformer les limites circulaires des câbles en des segments de droites horizontaux, et faciliter la résolution. Cependant, cette méthode a plusieurs désavantages, dont le principal est que les équations décrivant le réseau après transformation sont équivalentes aux équations aux différences finies obtenues par la discrétisation de l'équation de chaleur dans le plan W, et ainsi ne permettent pas d'éviter la complexité de la résolution numérique du problème de conduction de la chaleur. Un autre désavantage est que les surfaces limites, tant du sol que du câble, sont par hypothèse isothermes. De plus, la transformation point par point des limites des régions de résistivité différente est très laborieuse, et le logiciel à utiliser n'est pas en mesure de traiter efficacement un groupe de plus de quatre câbles.

## 2 Synthèse sur la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique numérique permettant la résolution d'équations différentielles partielles. Parmi les nombreux phénomènes physiques décrits par ces équations, le problème de la conduction de la chaleur ainsi que celui du transfert de masse et de chaleur à proximité des câbles de puissance ont fait l'objet de publications ([8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21]). Le concept de base de la méthode des éléments finis est que la température peut être approximée à l'aide d'un modèle discret composé d'un ensemble de fonctions continues définies sur un nombre fini de sous-domaines. Les fonctions continues élémentaires sont définies par les valeurs de température obtenues en un nombre fini de points dans la zone étudiée.

La discrétisation est construite comme suit:

- a) on commence par identifier un nombre fini de points dans la zone étudiée, ces points étant appelés points nodaux ou nœuds;
- b) la valeur de la température à chaque nœud est considérée comme une variable à déterminer;
- c) la zone d'étude est divisée en un nombre fini de sous-régions appelées éléments, qui sont interconnectées aux points nodaux communs, et dont l'ensemble a une forme approximativement identique à celle de la zone;
- d) une approximation polynomiale de la température dans chaque élément est obtenue à partir des valeurs de température nodales. Les polynômes sont différents pour chaque élément, mais ils sont choisis de manière à assurer la continuité aux limites de chaque élément. Les valeurs nodales sont calculées de manière à fournir la meilleure "approximation" possible à la distribution réelle de la température. Cette approche donne lieu à une équation matricielle, dont la solution est un vecteur intégrant les coefficients des approximations polynomiales. Du vecteur solution des équations algébriques, on déduit les températures nodales recherchées, ce qui donne la réponse pour toute la zone étudiée.

La construction d'une solution discrète est illustrée dans l'exemple unidimensionnel suivant concernant la répartition de la température dans un aileron; voir Figure 1 [22].



Although this superposition method is suitable for many cable rating problems, it is not well suited to problems involving a large number of cables and complex geometry.

The approach applying conformal transformation was proposed by CIGRE WG 21.02 and is described in Electra 98 [6]. Germaý and Mushamalirwa [7] compared the finite element method with four approaches based on a conformal transformation of the  $z$ -plane perpendicular to the cable axes into a  $w$ -plane, in order to transform the circular boundaries of the cables into horizontal straight segments to facilitate the solution. However, the conformal transformation method has several drawbacks. The major one is that the equations describing the transformed network are equivalent to finite difference equations obtained by discretising the heat equation in the  $w$ -plane and, hence, the complexity of a numerical solution of the heat conduction problem is not avoided. Another drawback is that both the earth and cable surfaces are assumed to be isothermal. In addition, transformation of the boundaries between regions with different resistivities point by point is very laborious and the resulting computer software cannot efficiently handle more than four cables in one installation.

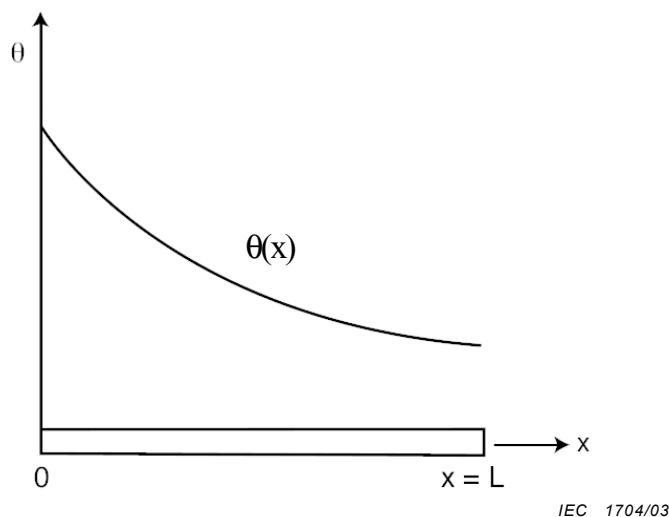
## 2 Overview of the finite element method

The finite element method is a numerical technique for solving partial differential equations. Among many physical phenomena described by such equations, the heat conduction problem and heat and mass transfer in the vicinity of power cables have been addressed in the literature ([8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21]). The fundamental concept of the finite element method is that temperature can be approximated by a discrete model composed of a set of continuous functions defined over a finite number of sub-domains. The piecewise continuous functions are defined using the values of temperature at a finite number of points in the region of interest.

The discrete solution is constructed as follows:

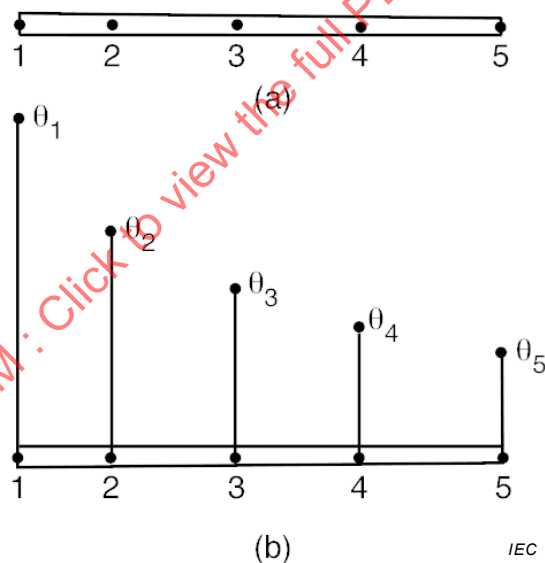
- a) A finite number of points in the solution region is identified. These points are called nodal points or nodes.
- b) The value of the temperature at each node is denoted as variable which is to be determined.
- c) The region of interest is divided into a finite number of sub-regions called elements. These elements are connected at common nodal points and collectively approximate the shape of the region.
- d) Temperature is approximated over each element by a polynomial that is defined using nodal values of the temperature. A different polynomial is defined for each element, but the element polynomials are selected in such a way that continuity is maintained along the element boundaries. The nodal values are computed so that they provide the "best" approximation possible to the true temperature distribution. This approach results in a matrix equation whose solution vector contains coefficients of the approximating polynomials. The solution vector of the algebraic equations gives the required nodal temperatures. The answer is then known throughout the solution region.

The construction of a discrete solution can be illustrated by using a one-dimensional example of the temperature distribution in a fin, shown in Figure 1 [22].

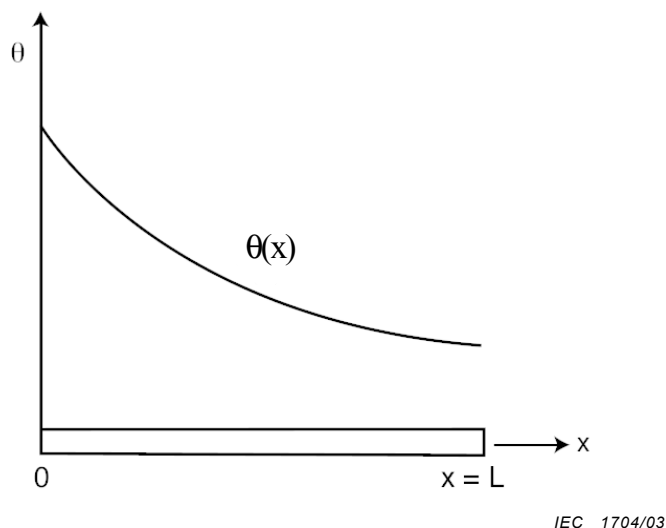


**Figure 1 – Répartition de la température dans un aileron unidimensionnel**

La fonction continue est la distribution de la température  $\theta(x)$ , et le domaine est l'intervalle  $[0, L]$  le long de l'axe des abscisses. Les nœuds sont indiqués dans la Figure 2a (ils ne sont pas nécessairement également espacés). Les valeurs de  $\theta(x)$  sont ensuite déterminées à chaque point nodal; elles sont illustrées graphiquement dans la Figure 2b, référencées de manière à correspondre aux numéros des nœuds,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ .

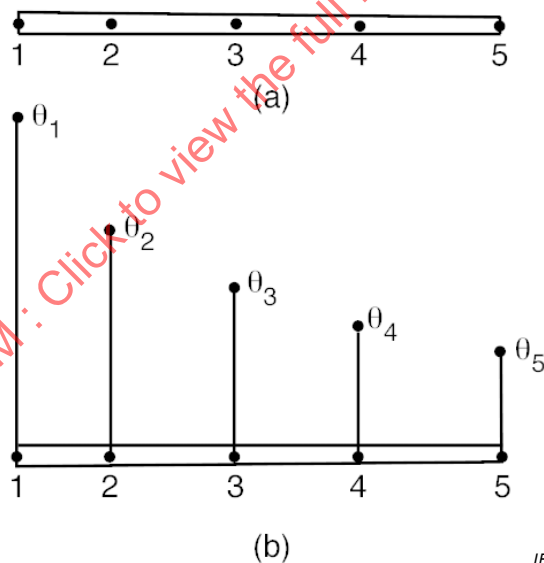


**Figure 2 – Les points nodaux et les valeurs supposées de  $\theta(x)$**



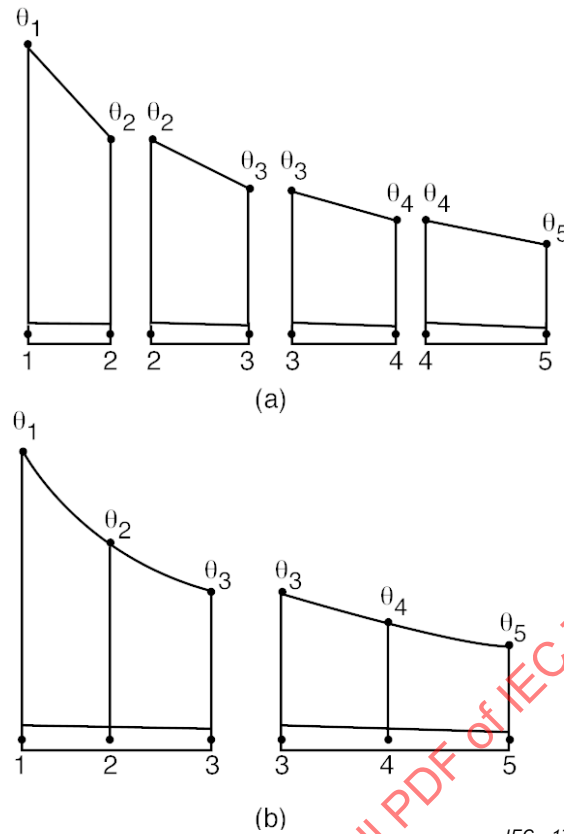
**Figure 1 – Temperature distribution in a one dimensional fin**

The continuous function is the temperature distribution  $\theta(x)$  and the domain is the interval  $[0, L]$  along the  $x$ -axis. The nodes are shown in Figure 2a (they do not have to be equally spaced). The values of  $\theta(x)$  are then specified at each node point. These values are shown graphically in Figure 2b and are labelled to match the node numbers,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ .



IEC 1705/03

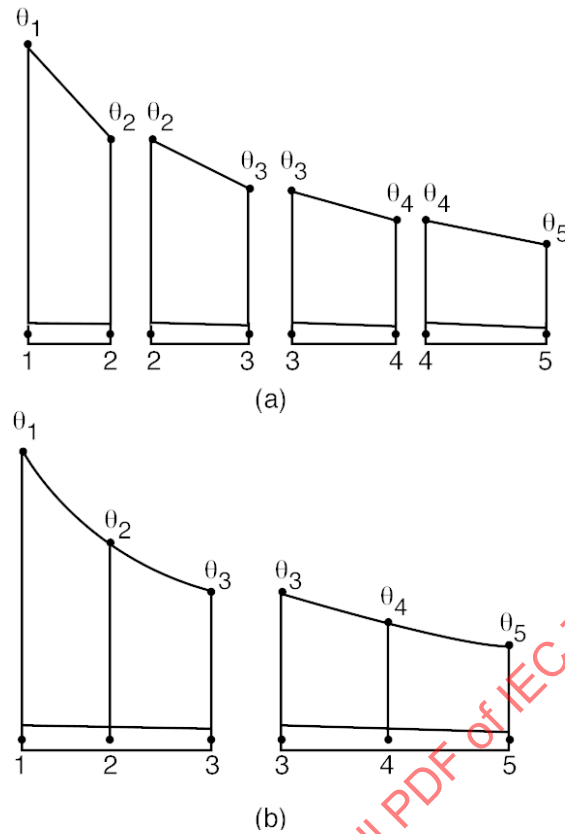
**Figure 2 – The nodal points and the assumed values of  $\theta(x)$**



**Figure 3 – Division du domaine en éléments**

La division du domaine en éléments peut se faire de deux façons. On peut limiter chaque élément à deux nœuds, avec comme résultat quatre éléments (Figure 3a), ou bien on peut diviser le domaine en deux éléments, chacun à trois nœuds (Figure 3b). L'approximation polynomiale pour l'élément est définie en utilisant les valeurs de  $\theta(x)$  aux points nodaux de l'élément. Lorsque l'on subdivise la zone en quatre éléments, il y a deux nœuds par élément et l'approximation pour l'élément est linéaire en  $x$ . L'approximation finale en  $\theta(x)$  consiste en quatre fonctions linéaires continues par morceaux, chacune définie pour un seul élément (Figure 4a).

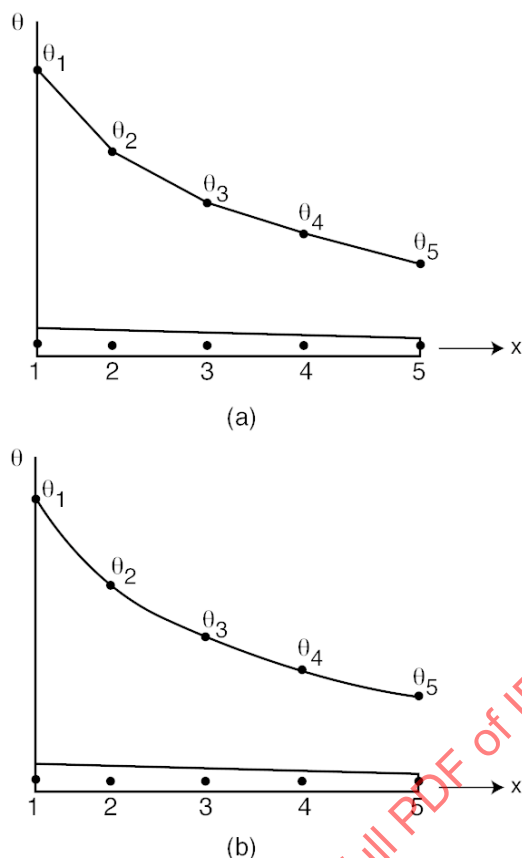
La division du domaine en deux éléments permet la mise en place d'une équation quadratique pour la fonction élément. Dans ce cas, l'approximation finale à  $\theta(x)$  est une fonction quadratique continue discrétisée (Figure 4b). Les fonctions élément constituent une approximation continue par morceaux, en raison du fait que les pentes des deux fonctions quadratiques ne sont pas nécessairement les mêmes au nœud 3.



**Figure 3 – Division of the domain into elements**

The division of the domain into elements can proceed in two ways. We can limit each element to two nodes yielding four elements (Figure 3a), or we can divide the domain into two elements each with three nodes (Figure 3b). The element polynomial is defined using the values of  $\theta(x)$  at the element nodal points. If we subdivide the region into four elements, there will be two nodes per element, and the element function will be linear in  $x$ . The final approximation to  $\theta(x)$  would consist of four piecewise continuous linear functions, each defined over a single element (Figure 4a).

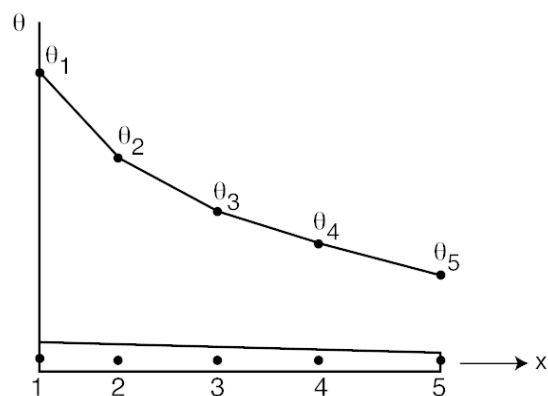
The division of the domain into two elements allows the element function to be a quadratic equation. The final approximation to  $\theta(x)$  in this case would be two piecewise continuous quadratic functions (Figure 4b). The element functions constitute a piecewise continuous approximation because the slopes of these two quadratic functions are not necessarily the same at node three.



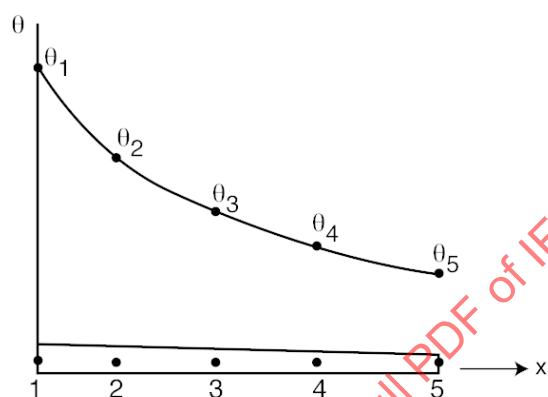
**Figure 4 – Modèle discrétisé d'une distribution de température unidimensionnelle**

Généralement, la distribution de la température est inconnue, et on cherche à déterminer sa valeur en des points déterminés. Les températures  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  aux points nodaux sont inconnues, et doivent d'abord être déterminées. La procédure de détermination de ces températures est décrite à l'Annexe A.

Pour le calcul de la capacité de transport des câbles, on utilise communément des éléments bi-dimensionnels; les éléments dans le domaine bi-dimensionnel sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ , et sont généralement des triangles ou des quadrilatères. La fonction élément devient un plan (Figure 5) ou une surface courbe (Figure 6). Le plan est associé au nombre minimum de nœuds élément, soit trois pour le triangle, et quatre pour le quadrilatère.



(a)



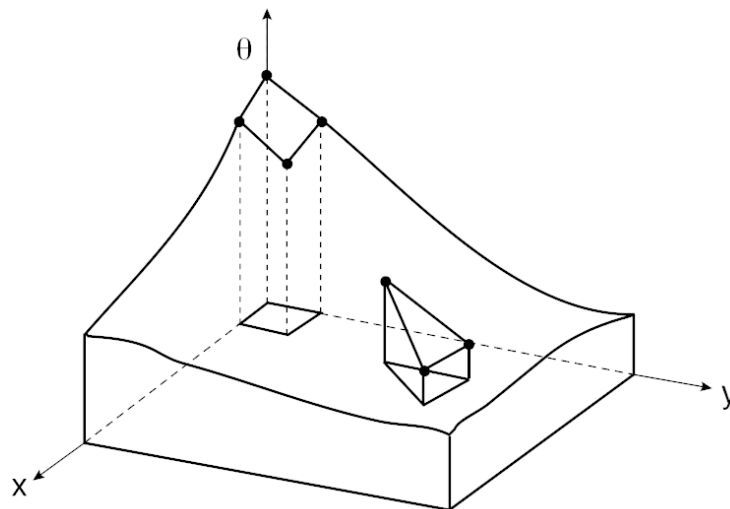
(b)

IEC 1707/03

**Figure 4 – Discrete models for one-dimensional temperature distribution**

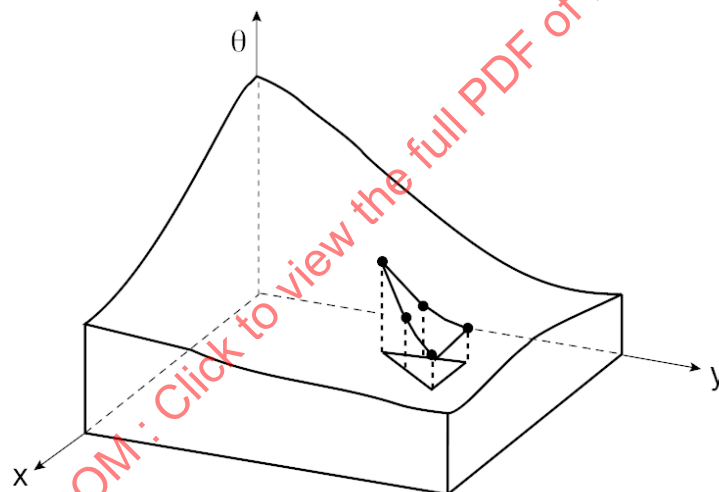
Generally, the temperature distribution is unknown, and we wish to determine the values of this quantity at certain points. The temperatures  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  at the nodal points are unknown and they have to be determined first. The procedure for the determination of these temperatures is described in Annex A.

In cable rating applications, two-dimensional elements are most commonly used. The elements in the two-dimensional domain are functions of  $x$  and  $y$  and are generally either triangular or quadrilateral in shape. The element function becomes a plane (Figure 5) or a curved surface (Figure 6). The plane is associated with the minimum number of element nodes, which is three for the triangle and four for the quadrilateral.



IEC 1708/03

**Figure 5 – Modélisation d'une fonction scalaire bi-dimensionnelle par l'utilisation d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux**



IEC 1709/03

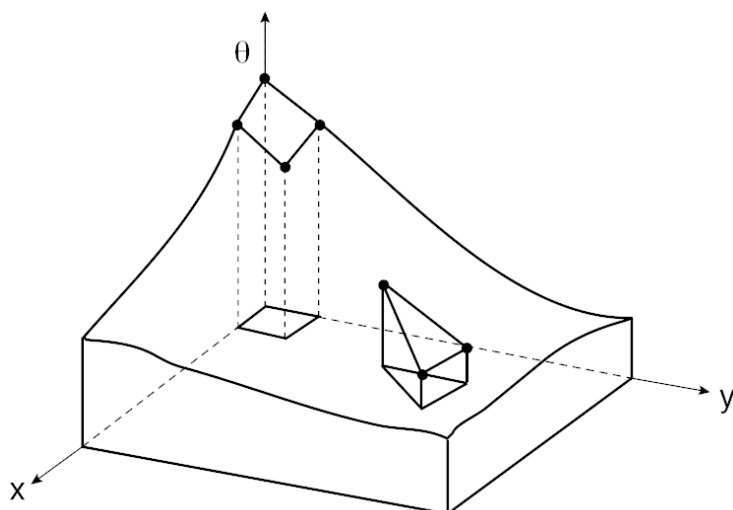
**Figure 6 – Modélisation d'une fonction scalaire bi-dimensionnelle par l'utilisation d'un élément triangulaire quadratique**

La fonction élément peut être une surface courbe lorsque l'on utilise plus du nombre minimum de nœuds. Un nombre de nœuds excédentaires confère aux éléments des arêtes courbes.

### 3 Considérations pratiques pour l'application de la méthode des éléments finis aux calculs de capacité de transport des câbles

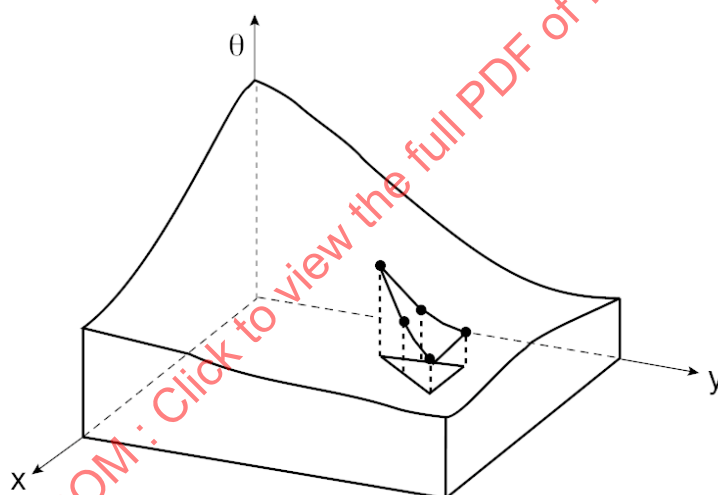
Lorsque le programme des éléments finis est utilisé pour l'analyse d'une installation de câbles souterrains, l'utilisateur garde la maîtrise de plusieurs paramètres qui influent sur la précision des calculs; ce sont: (1) la taille de la région à discrétiser; (2) la taille des éléments construits par le générateur de mailles; (3) le type et la situation des limites de zones; (4) la représentation des pertes des câbles; (5) la sélection du pas de temps pour l'analyse des transitoires. Ces facteurs sont passés en revue ci-après.





IEC 1708/03

**Figure 5 – Modelling of a two-dimensional scalar function using triangular or quadrilateral elements**



IEC 1709/03

**Figure 6 – Modelling of a two-dimensional scalar function using a quadratic triangular element**

The element function can be a curved surface when more than the minimum number of nodes is used. An excess number of nodes also allows the elements to have curved boundaries.

### 3 Practical considerations when applying the finite element method for cable rating calculations

When the finite element program is used for the analysis of an underground cable installation, the user retains the control over several parameters which influence the accuracy of the calculations. These are: (1) size of the region to be discretised, (2) size of the elements constructed by mesh generator, (3) type and location of region boundaries, (4) representation of cable losses, and (5) selection of the time step in transient analysis. These topics are reviewed below.

### 3.1 Sélection de la région à discrétiser

Le positionnement des frontières est un facteur important pour les études numériques. La surface du sol est une limite évidente, mais la région située en dessous est infinie. L'objectif est donc de sélectionner une région suffisamment grande pour permettre aux valeurs calculées le long des frontières de correspondre à celles qui existent dans la réalité physique. En ce qui concerne l'évaluation de la capacité de transport des câbles, cela signifie que les frontières latérales et inférieures doivent être sélectionnées de manière à ce que les températures nodales au niveau de ces frontières aient toutes la même valeur, et que le gradient de température traversant la frontière soit nul.

L'expérience, complétée d'une étude présentant comment sont modélisées des régions infinies similaires, est sans doute le meilleur guide. Selon notre expérience, un champ rectangulaire d'une largeur de 10 m et d'une profondeur de 5 m, dans lequel les câbles sont situés au centre, donne des résultats satisfaisants dans la majorité des cas pratiques.

Pour l'analyse des transitoires, la zone du sol, à l'extérieur de laquelle il y a dissipation de chaleur, a un rayon qui augmente avec le temps; dans la pratique, il suffit de ne prendre en considération que le rayon au sein duquel une hausse de température significative se produit. Ce rayon peut être estimé à partir de l'équation suivante, qui suppose que chaque câble est une source linéaire de chaleur.

$$\theta_{r,t} = \frac{W_I \rho_s}{4\pi} \left[ -Ei \left( \frac{-r^2}{4\delta t} \right) \right]$$

où  $\theta_{r,t}$  est la valeur seuil de température à la distance  $r$  de l'axe du câble, les autres notations étant celles utilisées dans la CEI 60853. La valeur  $\theta_{r,2}$  peut être prise égale à 0,1 K lorsque le nombre de câbles n'excède pas 3 ou à une valeur convenable plus petite pour un nombre de câbles plus grand. L'équation ci-dessus s'applique à chaque câble. La région à discrétiser est représentée par une enveloppe qui intègre tous les cercles.

### 3.2 Taille des éléments

Dans la plupart des générateurs de maille du commerce, l'utilisateur garde une certaine maîtrise de la taille des éléments, grâce à la spécification de l'espacement entre les nœuds des frontières dans les différentes parties du réseau (câbles, remblai, sol, etc.). Cet espacement peut être adapté pour obtenir la taille souhaitée des éléments (les éléments doivent être de taille d'autant plus réduite qu'ils se rapprochent des câbles). Plus la taille de l'élément est réduite, plus les résultats sont précis. Cependant, le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre d'éléments du modèle. Un compromis est donc nécessaire dans le choix de la taille optimale des éléments. Comme les éléments les plus petits sont généralement associés au câble lui-même, leur taille maximale ne peut dépasser les dimensions des constituants du câble modélisé. La Figure 7a montre un exemple de 6 câbles situés dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, alors que les Figures 7b et 7c montrent deux représentations d'éléments finis pour les deux câbles centraux de cette installation. Dans la Figure 7b, la plus grande taille d'éléments permise est utilisée, alors que dans la Figure 7c on applique des éléments considérablement plus réduits. L'isotherme à 80°C est tracée dans les deux cas pour démontrer l'effet des approximations.

### 3.1 Selection of the region to be discretised

Location of boundaries is an important consideration in numerical studies. The earth's surface is an obvious boundary, but the region underneath is infinite. The objective is to select a large enough region so that the calculated values along the boundaries agree with those that exist in the physical problem. For the cable rating problem, this means that the side and bottom boundaries must be selected in such a way that the nodal temperatures at those boundaries all have the same value and the temperature gradient across the boundary is equal zero.

Experience plus a study of how others modelled similar infinite regions is probably the best guide. In our experience, a rectangular field 10 m wide and 5 m deep, with the cables located in the centre, gives satisfactory results in the majority of practical cases.

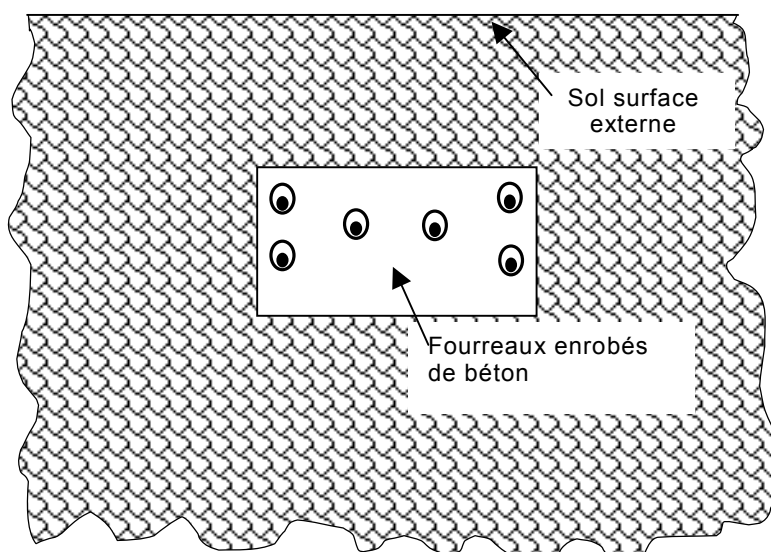
For transient analysis, the radius of the soil, out to which heat disperses, will increase with time and for practical purposes it is sufficient to consider only that radius within which a sensible temperature rise occurs. This radius can be estimated from the following equation assuming that each cable is a line source of heat:

$$\theta_{r,t} = \frac{W_l \rho_s}{4\pi} \left[ -Ei \left( \frac{-r^2}{4\delta t} \right) \right]$$

where  $\theta_{r,t}$  is the threshold temperature value at the distance  $r$  from the cable axis and the remaining notation is that used in IEC 60853. The value of  $\theta_{r2}$  can be taken as 0,1 K when the number of cables is not greater than 3 and suitably smaller for a large number of cables. The above equation is applied for each cable. The region to be discretised will be an envelope around all the circles.

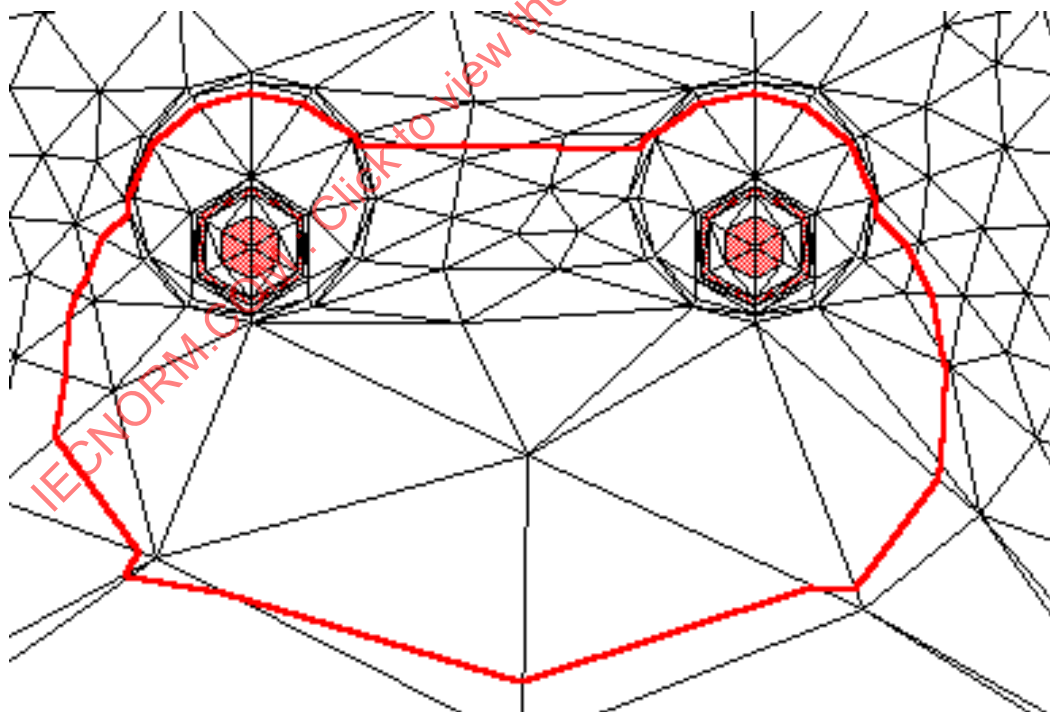
### 3.2 Element sizes

In most of the commercial mesh generators, the user retains some sort of control of the element sizes. This is achieved by specifying the spacing between boundary nodes for various parts of the network (cables, backfill, soil, etc.). This spacing can be varied to obtain desired element sizes (the elements should be smallest closer to the cables). The smaller the element size, the more accurate the results. However, the computing time rises exponentially with the number of elements in the model. Hence, a compromise is required in the selection of the suitable element size. Since the smallest elements are usually associated with the cable itself, their maximum size cannot be greater than the dimensions of the part of the cable which is fitted with the elements. Figure 7a shows an example of 6 cables located in a concrete duct bank and Figures 7b and 7c show two finite element representations of the two middle cables in this installation. In Figure 7b, the largest permissible element size is used, and in Figure 7c much smaller elements are applied. The 80°C isotherm is shown for both cases to show the effect of the approximations.



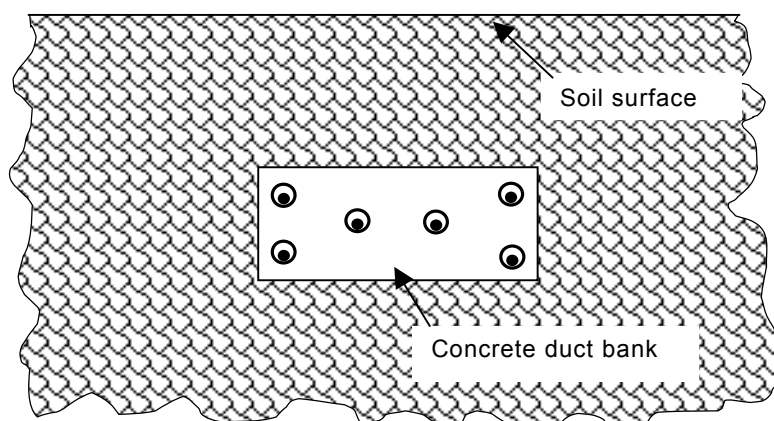
IEC 1710/03

**Figure 7(a) – Exemple de 6 câbles dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, installation**

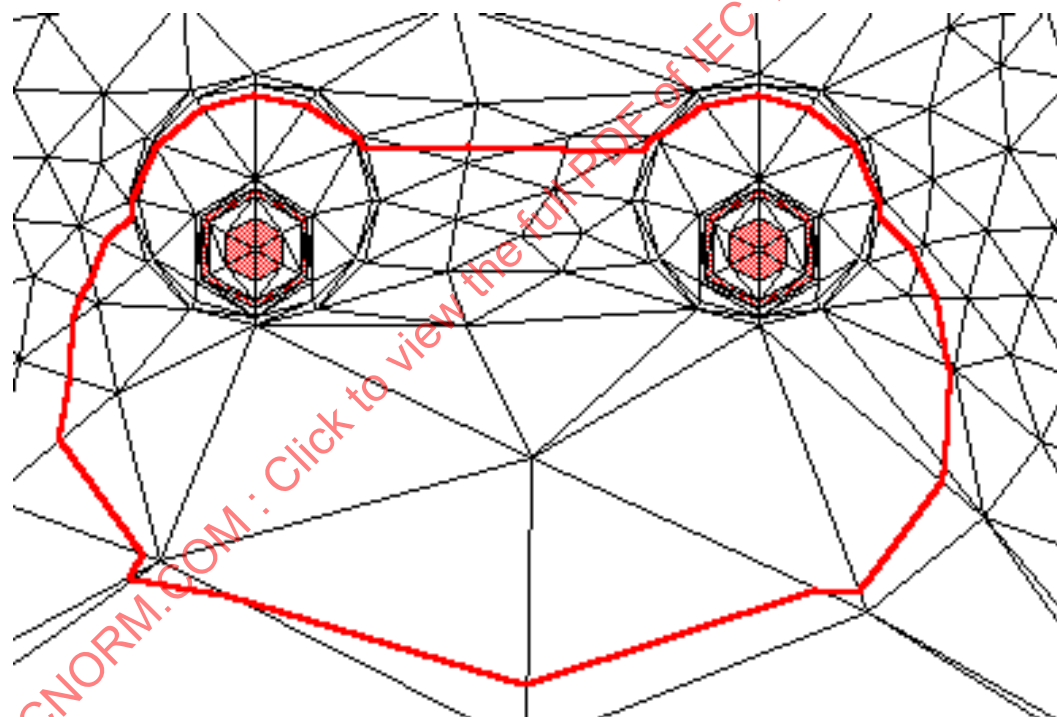


IEC 1711/03

**Figure 7(b) – Exemple de 6 câbles dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, maillage grossier**

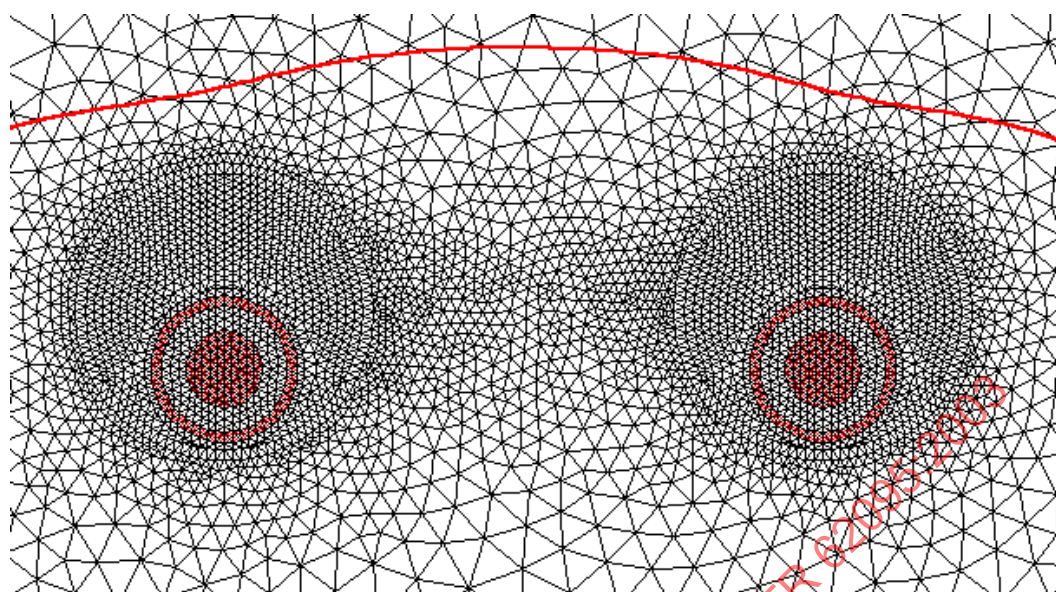


**Figure 7(a) – Example of 6 cables in a concrete duct bank, installation**



IEC 1711/03

**Figure 7(b) – Example of 6 cables in a concrete duct bank, coarse mesh**



IEC 1712/03

**Figure 7(c) – Exemple de 6 câbles dans un bloc de fourreaux enrobés de béton, maillage fin**

**Figure 7 – Exemple de maillage dans un modèle d'élément fini**

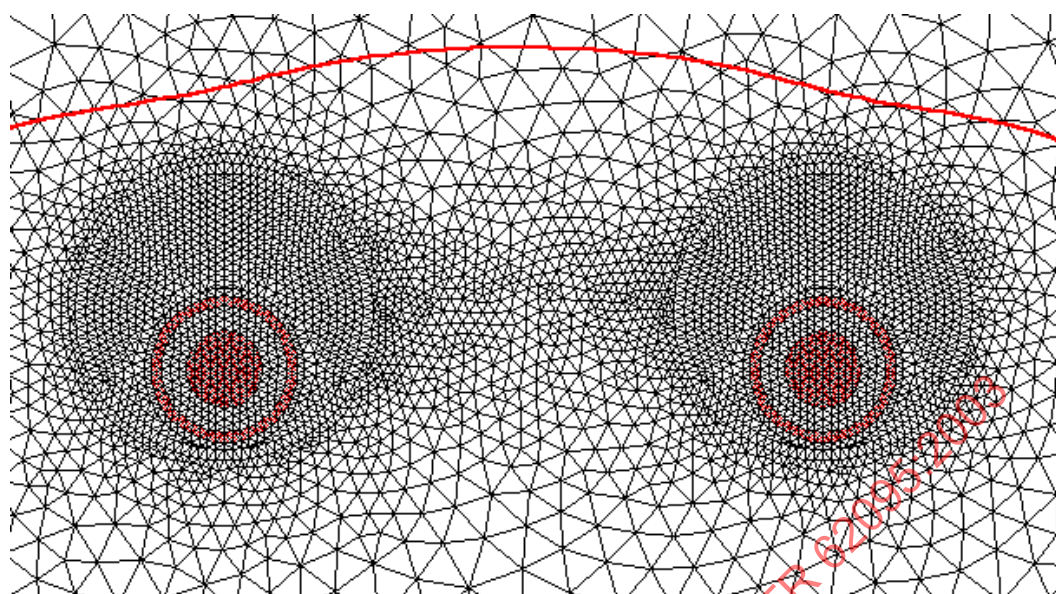
Il est évident que la situation et la forme de l'isotherme diffèrent dans les deux cas. La température du conducteur dans le cas (b) est de 93,3 °C et dans le cas (c) de 96,5 °C. Ces calculs ont demandé un temps de traitement 25 fois plus long pour (c) que pour (b). Cet exemple précis confirme l'observation générale qu'un maillage relativement grossier peut donner des résultats satisfaisants, dès lors qu'une imprécision de quelques degrés de température est tolérée.

### 3.3 Conditions aux limites

Contrairement aux méthodes classiques de calcul de la capacité de transport des câbles, où l'on fait l'hypothèse d'une limite isotherme à la surface du sol, la méthode des éléments finis permet la représentation de différentes conditions aux limites, ainsi que des localisations de frontières quelconques. Des frontières droites ou courbes peuvent ainsi être représentées. En particulier, les frontières circulaires, représentant les surfaces soit du câble, soit de tuyaux d'eau ou de vapeur, peuvent facilement être traitées. Dans certaines applications, le seul point d'intérêt peut être la résistance thermique externe du câble, et, dans ce cas, une frontière circulaire peut être utile pour représenter le câble.

Trois différentes conditions aux limites peuvent s'appliquer aux calculs de capacité de transport des câbles par la méthode des éléments finis. Si la température est connue dans une portion de la frontière, la condition isotherme est satisfaite. Cette température peut être une fonction de la longueur de la surface en question. L'information requise par le logiciel de calcul par éléments finis est la valeur de la température à la limite. A noter que si les conditions représentées dans la CEI 60287 sont à modéliser par la méthode des éléments finis, cette température est la température ambiante à la profondeur d'enfouissement du câble.





IEC 1712/03

**Figure 7(c) – Example of 6 cables in a concrete duct bank, fine mesh**

**Figure 7 – Example of meshing a finite element model**

As can be seen, the location and shape of the isotherm is somewhat different in both cases. The conductor temperature in case (b) is 93,3°C and in case (c) 96,5°C. The calculations took about 25 times longer in case (c) than in case (b). This particular example confirms a general observation that a fairly coarse network can give satisfactory results if a precision of a few degrees is acceptable.

### 3.3 Boundary conditions

Unlike in the case of the classical cable rating computations, where the isothermal earth surface boundary is assumed, the finite element method allows representation of different boundary conditions and arbitrary boundary locations. Both straight line and curved boundaries can be represented. In particular, circular boundaries representing either cable, water or steam pipe surfaces can easily be handled. In some applications, only the external thermal resistance of the cable may be of interest and the circular boundary representation of the cable can be used in this case.

Three different boundary conditions are applicable for cable current rating calculations using the finite element method. If the temperature is known along a portion of the boundary, then the isothermal condition exists. This temperature may be a function of the surface length. The information required by the finite element software is the value of the boundary temperature. It should be noted that if the conditions represented in the IEC 60287 approach are to be modelled using the finite element method, this temperature is the ambient temperature at the depth of the cable burial.

Si la chaleur augmente ou diminue en raison d'un effet de convection à la frontière, il existe une condition aux limites convective. Cette condition doit être utilisée lorsque des câbles de grand diamètre sont installés proches de la surface du sol. Dans ce cas, l'utilisateur devra préciser la valeur du coefficient de convection de chaleur ainsi que la température ambiante à l'air libre. Le transfert de la chaleur par convection à la surface du sol intègre une convection naturelle et une convection forcée. Normalement, cette dernière est plus forte que la première. La détermination du coefficient de convection est une tâche très importante pour les calculs de la capacité des câbles par la méthode des éléments finis. La valeur de ce coefficient varie entre  $2 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  et  $25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  pour la convection libre, et entre  $25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  et  $250 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  pour la convection forcée. Plus la valeur du coefficient est faible, plus le réchauffement est important dans le sol.

Le troisième type de condition aux limites qui peut se présenter dans les calculs de capacité de transport des câbles est une condition aux limites de flux de chaleur constant. Cette condition aux limites sera vraisemblablement nécessaire lorsqu'il y a d'autres sources de chaleur à proximité des câbles étudiés, et lorsque la chaleur qu'elles produisent est connue.

### 3.4 Représentation des pertes du câble

Les pertes de l'âme, de l'écran métallique ainsi que les pertes diélectriques sont représentées, dans les études par éléments finis, par des sources de chaleur. Il faut donc veiller à les faire varier, soit dans le temps, soit selon la température. Les valeurs des pertes sont recalculées à chaque pas de temps, en utilisant les méthodes précisées dans la CEI 60287.

Les pertes de l'âme, de l'écran métallique et de l'armure dépendant de la température, une procédure itérative est nécessaire. Généralement, trois ou quatre itérations suffisent à obtenir la précision nécessaire.

Pour les calculs de transitoires avec la méthode des éléments finis, chaque nœud présente un échauffement initial à  $t=0$ . Dans le cas général où le transitoire provoqué par les pertes diélectriques n'est pas stabilisé, ces échauffements initiaux (par rapport à la température ambiante en dehors de la maille) doivent être obtenus à partir d'un calcul préalable. Dès le début du transitoire, le calcul doit dans tous les cas prendre en compte à la fois les pertes joules et les pertes diélectriques. Les deux situations généralement rencontrées sont les suivantes.

- Le transitoire provoqué par les pertes diélectriques a atteint un état stable (application de la tension depuis une longue durée). L'augmentation initiale de la température à chaque nœud est supposée égale à l'échauffement permanent provoqué par les seules pertes diélectriques.
- La tension est appliquée au câble en même temps que le courant de charge. Dans ce cas, les échauffements initiaux sont nuls; on doit attribuer aux foyers de pertes diélectriques les valeurs appropriées, à partir du temps zéro.

### 3.5 Sélection du pas de temps

Sachant que, en général, l'évolution des températures au cours du temps est estimée pas à pas, il faut veiller à bien choisir le pas de temps. En principe, on doit sélectionner le pas de temps le plus grand possible, afin de réduire la charge de calcul, ce qui peut malheureusement altérer la précision si le pas sélectionné est trop grand. Electra 87 et Libondi [23] donnent quelques conseils pour la sélection de valeurs appropriées. La durée du pas de temps  $\Delta t$ , dépend des conditions suivantes:

- la constante de temps  $\sum T \cdot \sum Q$  du réseau (défini comme le produit de sa résistance thermique totale (entre âme et surface extérieure) et sa capacité thermique totale (pour le câble entier)),



If heat is gained or lost at the boundary due to convection, the convective boundary exists. Such a boundary should be used when large diameter cables are installed close to the ground surface. In this case, the user will be required to specify the value of the heat convection coefficient and air ambient temperature. The convection heat transfer at the earth surface includes natural and forced convection. Normally, forced convection is much stronger than natural convection. Determination of the convection coefficient is a very important task in computation of ratings of cables using the finite element method. The value of this coefficient varies between  $2 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  and  $25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  for free convection and between  $25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  and  $250 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  for forced convection. The lower the value of this coefficient, the more severe heating occurs in the ground.

The third type of the boundary which can occur in cable rating calculations is the constant heat flux boundary. Such a boundary will most likely be required when there are other heat sources in the vicinity of the cables being examined and their heat generation is known.

### 3.4 Representation of cable losses

Conductor, sheath and dielectric losses are represented in the finite element studies as heat sources and provision should be made to vary these as required with time and/or temperature. Values of these losses are recalculated at each time step, using methods given in IEC 60287.

Conductor, sheath and armour losses are temperature dependent. Therefore, an iterative procedure is required. Usually, 3 to 4 iterations are sufficient to obtain the required accuracy.

For transient calculations in the finite element method, each node contains an initial temperature rise at  $t=0$ . In the general case, where the transient due to the dielectric loss may not have reached its steady-state, these initial temperature rises (relative to the ambient temperature outside of the mesh) must be obtained from a prior calculation. From the beginning of the transient the computation must in all cases take account of both the Joule and the dielectric losses. The two usual situations are as follows:

- a) the transient due to dielectric losses has reached a steady-state (the voltage has been applied for a very long time). The initial temperature rise at each node is put equal to the steady-state temperature rise at that point caused by the dielectric losses only;
- b) the voltage is applied to the cable at the same time as the load current. In this case, the initial temperature rises are zero and the dielectric loss generators should be allocated their proper values from time zero.

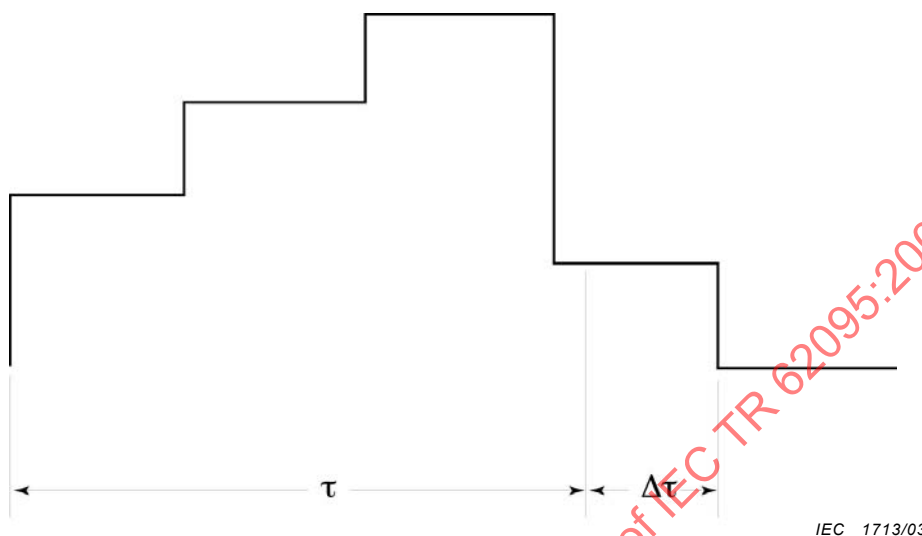
### 3.5 Selection of a time step

Since, in general, the computations involve evaluation of temperatures in increments of time, care must be taken in the selection of the time step. In principle, one should select as large a time interval as possible to reduce the amount of computation. Unfortunately, the size of the time step can affect the accuracy of the computations if too large a step is used. Electra 87 and Libondi [23] provide some guidance on the selection of suitable values. The duration of the time step,  $\Delta\tau$ , will depend on

- a) the time constant,  $\sum T \cdot \sum Q$  of the network (defined as the product of its total thermal resistance (between conductor and outer surface) and its total thermal capacitance (whole cable)),

- b) le temps écoulé depuis le début du transitoire,  $\tau$ , et
- c) la localisation de l'instant  $\tau$  considéré, en relation avec la forme de la courbe de charge appliquée.

NOTE La valeur requise en c) est illustrée à la Figure 8.



**Figure 8 – Relation entre le pas de temps, la courbe de charge et le temps écoulé depuis le début du transitoire**

Les conditions suivantes sont proposées pour la sélection du pas de temps  $\Delta\tau$  (Electra 87):

$$\log_{10} \frac{\Delta\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} = \frac{1}{3} \log_{10} \frac{\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} - 1,58 \quad \text{pour} \quad \tau < \frac{1}{3} \Sigma T \cdot \Sigma Q$$

$$\log_{10} \frac{\Delta\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} = \frac{1}{3} \log_{10} \frac{\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} - 1,25 \quad \text{pour} \quad \tau > \frac{1}{3} \Sigma T \cdot \Sigma Q$$

Il est préférable d'ajuster automatiquement le pas de temps pendant les calculs.

#### **4 Exemples d'application de la méthode des éléments finis pour l'évaluation des capacités de transport des câbles**

Les exemples suivants montrent des applications de la méthode des éléments finis pour les calculs de capacité de transport des câbles souterrains. Le premier exemple qui porte sur une installation typique de câble peut facilement être résolu en utilisant l'approche analytique décrite dans la CEI 60287. Les deux autres exemples sont des situations où les méthodes analytiques ne sont pas recommandées.

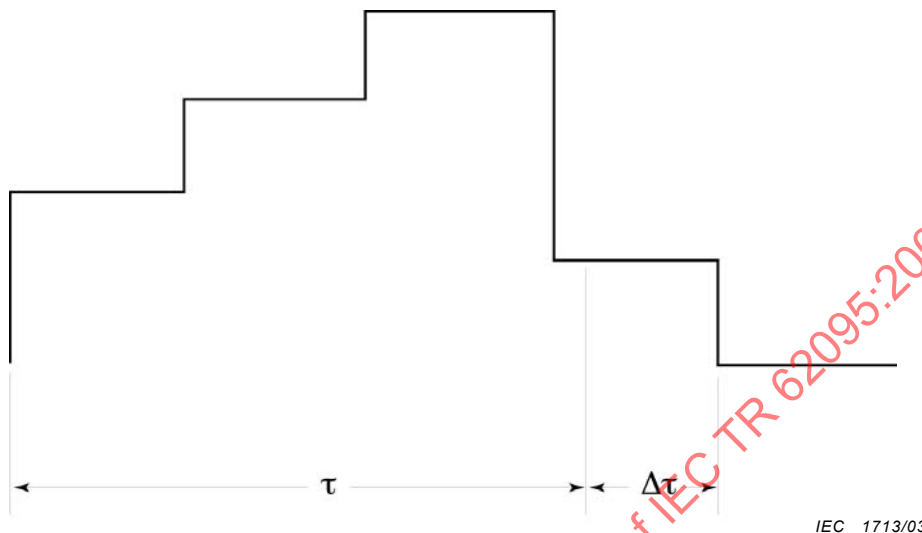
##### **4.1 Exemple 1**

On considère un câble tripolaire isolé au polyéthylène réticulé (PR), 30 kV, à âme en cuivre de section 300 mm<sup>2</sup> et gaine de plomb. Tous les paramètres thermiques et électriques sont spécifiés dans la CEI 60287 (1982).

Le câble est posé en pleine terre, comme indiqué à la Figure 9.

- b) time elapsed from the beginning of the transient,  $\tau$ , and
- c) the location of the time  $\tau$  with relation to the shape of the load curve being applied.

NOTE Requirement c) can be illustrated as shown in Figure 8.



**Figure 8 – Relationship between the time step, the load curve and the time elapsed from the beginning of the transient**

The following conditions are suggested for the selection of the time step  $\Delta\tau$  (Electra 87):

$$\log_{10} \frac{\Delta\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} = \frac{1}{3} \log_{10} \frac{\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} - 1,58 \quad \text{for} \quad \tau < \frac{1}{3} \Sigma T \cdot \Sigma Q$$

$$\log_{10} \frac{\Delta\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} = \frac{1}{3} \log_{10} \frac{\tau}{\Sigma T \cdot \Sigma Q} - 1,25 \quad \text{for} \quad \tau > \frac{1}{3} \Sigma T \cdot \Sigma Q$$

Adjusting the time step automatically during the computations is the preferable approach.

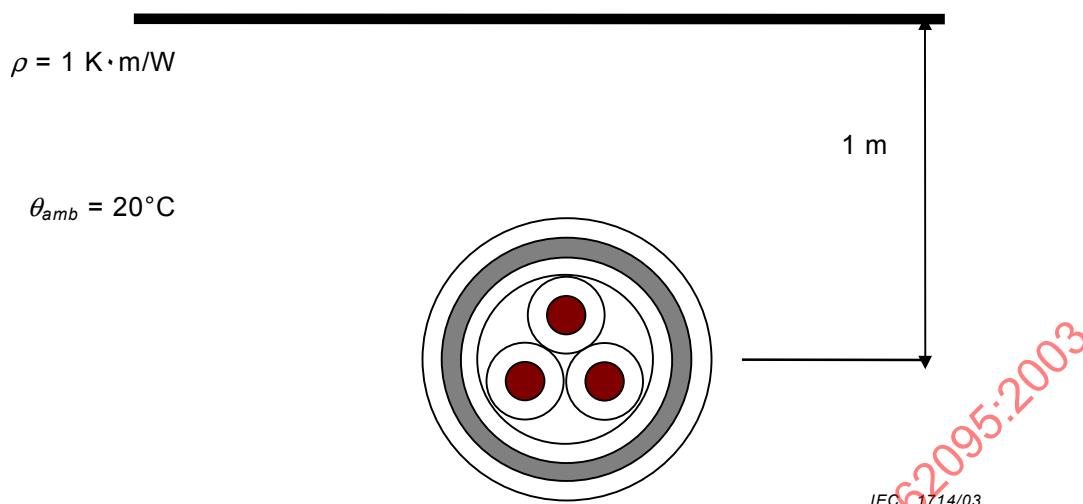
#### 4 Examples of application of the finite element method for cable rating calculations

The following examples show applications of the finite element method for current rating calculations of underground cables. The first example examines a standard cable installation which can easily be solved using the analytical approach described in IEC 60287. The remaining two examples show the situations when analytical methods are not advisable.

##### 4.1 Example 1

Consider a 30 kV three-core, XLPE-insulated cable with 300 mm<sup>2</sup> copper conductor and a lead sheath. All thermal and electrical parameters are as specified in IEC 60287 (1982).

The cable is directly buried as shown in Figure 9.



**Figure 9 – Conditions de pose pour l'étude par éléments finis, exemple 1**

La température ambiante du sol est de 20°C. La résistivité thermique du sol est donnée à la Figure 9.

Les résultats de l'analyse, obtenus à l'aide de la méthode de la CEI 60287 et avec l'approche par éléments finis, sont résumés au Tableau 1.

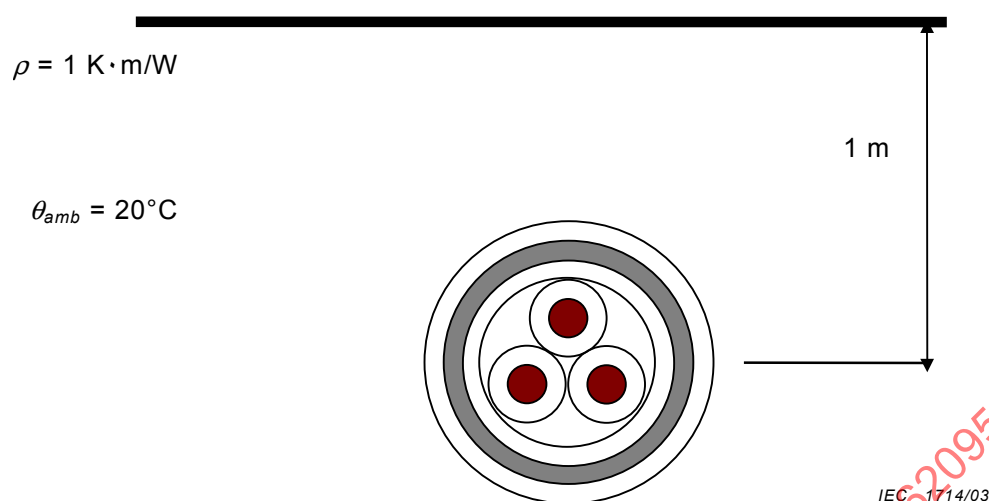
**Tableau 1 – Comparaison des résultats obtenus à l'aide de la CEI 60287 et avec la méthode des éléments finis pour les câbles de l'exemple 1**

| Méthode de calcul | Température<br>°C |                  |         |
|-------------------|-------------------|------------------|---------|
|                   | Âme               | Gaine métallique | Externe |
| CEI 60287         | 90                | 71,1             | 66,4    |
| Éléments finis    | 89,3              | 70,5             | 66,5    |

Les résultats sont remarquablement proches les uns des autres pour cette installation classique.

#### 4.2 Exemple 2

Cet exemple concerne une installation comportant différents types de câbles, plusieurs couches de sol et une frontière verticale convective, voir Figure 10. Ce système ne peut être traité par les méthodes décrites dans la CEI 60287, mais est facile à aborder par la méthode des éléments finis. Les isothermes calculées par le programme aux éléments finis sont indiquées en Figure 11.



**Figure 9 – Laying conditions for the finite element study in example 1**

Soil ambient temperature is 20°C. Thermal resistivity of the soil is shown in Figure 9.

The results of the analysis performed using the IEC 60287 method and the finite element approach are summarised in Table 1.

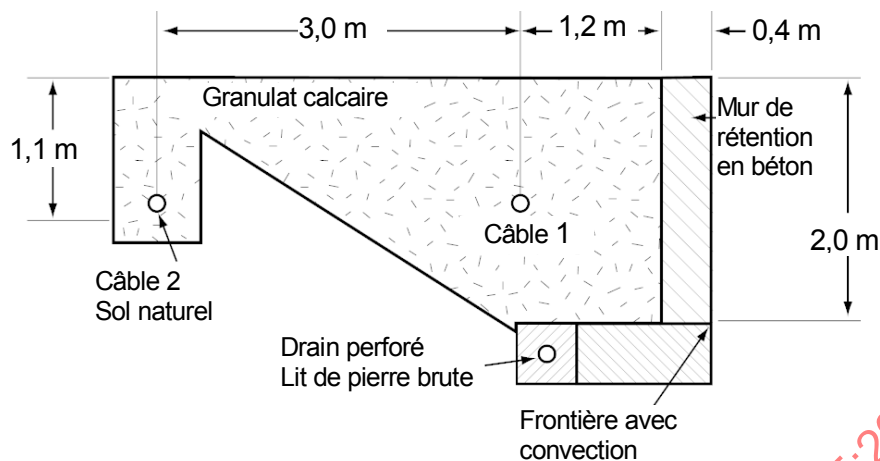
**Table 1 – Comparison of the IEC 60287 and the finite element results for cables in example 1**

| Calculation method | Temperature<br>°C |        |          |
|--------------------|-------------------|--------|----------|
|                    | Conductor         | Sheath | External |
| IEC 60287          | 90                | 71,1   | 66,4     |
| Finite element     | 89,3              | 70,5   | 66,5     |

The results are remarkably close for this standard cable installation.

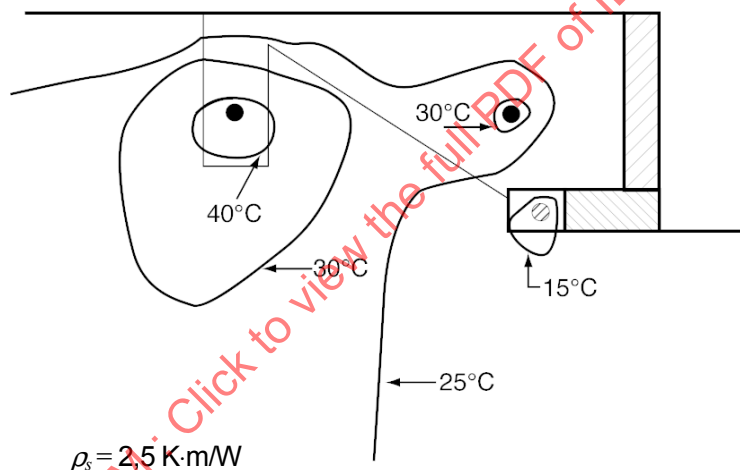
## 4.2 Example 2

This example shows an installation where with different cable types, several soil layers and a convective vertical boundary, see Figure 10. This system cannot be examined with the use of the methods described in IEC 60287, but can be easily handled by the finite element method. The isotherms computed with the finite element program are shown in Figure 11.



IEC 1715/03

Figure 10 – Installation de l'exemple 2

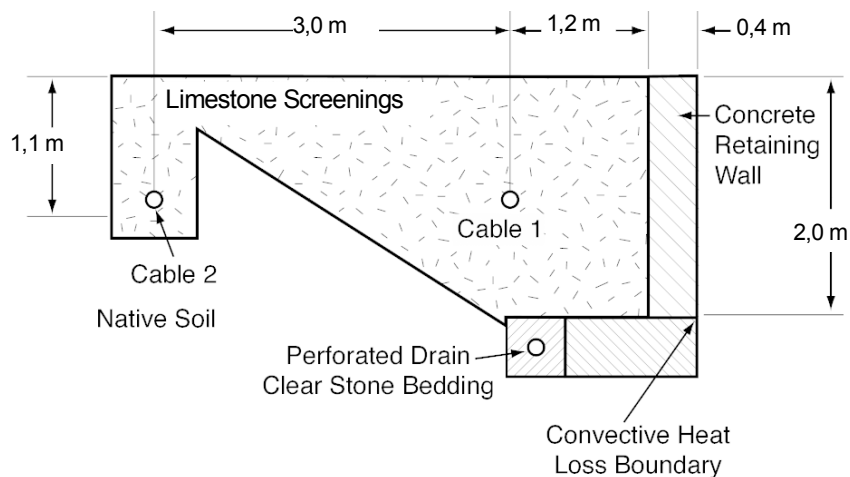


IEC 1716/03

Figure 11 – Isothermes pour l'installation de la Figure 10

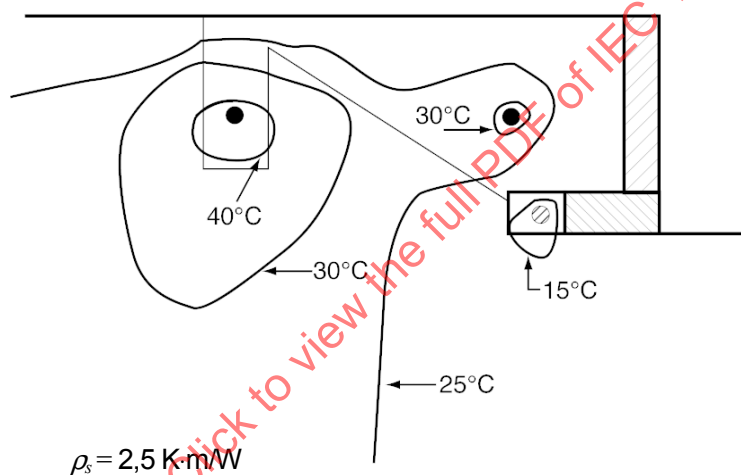
#### 4.3 Exemple 3

Lorsque les câbles sont installés dans des caniveaux remplis de sable qui sont soit complètement enfouis, soit affleurant la surface du sol, il y a risque de dessèchement du sable, qui peut demeurer sec pendant de longues périodes. La résistance thermique extérieure du câble peut ainsi s'élever de manière importante, et le câble peut atteindre des températures excessives. Il est recommandé dans la CEI 60287 d'effectuer le calcul de la capacité de transport du câble avec une valeur de 2,5 K·m/W pour la résistivité thermique du sable de remplissage, à moins que l'on utilise comme matériau de remplissage un remblai contrôlé de résistivité à sec connue. Lorsque les câbles sont posés dans des caniveaux peu profonds, il faut modéliser une limite convective. Pour illustrer la différence entre la température calculée par l'approche CEI 60287 et la méthode des éléments finis, on considère l'installation de la Figure 12.



IEC 1716/03

Figure 10 – Installation for example 2

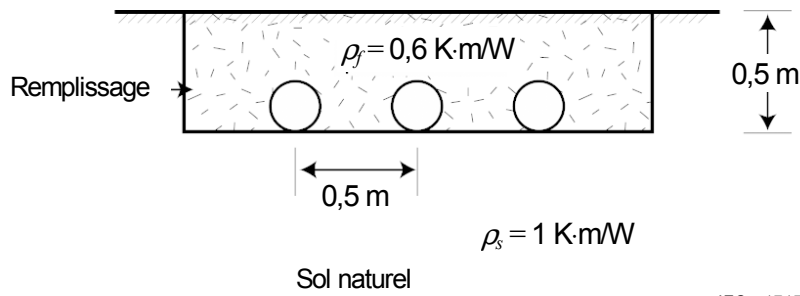


IEC 1716/03

Figure 11 – Isotherms for the system in Figure 10

#### 4.3 Example 3

When cables are installed in sand-filled troughs, either completely buried or with the cover flush with the ground surface, there is a danger that the sand will dry out and remain dry for long periods. The cable external thermal resistance may then be very high and the cable may reach undesirably high temperatures. IEC 60287 advises to calculate the cable rating using a value of 2,5 K·m/W for the thermal resistivity of the sand filling unless a specially selected filling has been used for which the dry resistivity is known. When cables are located in shallow troughs, a convective boundary has to be modelled. To illustrate the difference in the temperature computed using the IEC 60287 approach and the finite element method, consider an installation shown in Figure 12.



IEC 1717/03

**Figure 12 – Câbles de forte section posés dans un caniveau à faible profondeur**

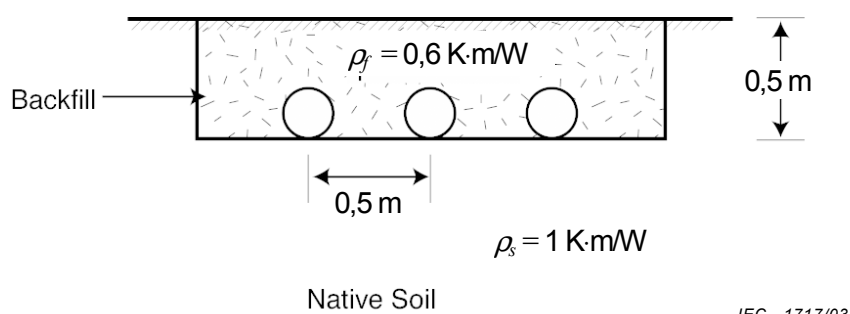
Le Tableau 2 montre les résultats obtenus avec l'approche CEI 60287 et avec la méthode des éléments finis, en supposant une température ambiante de 20°C.

**Tableau 2 – Température de l'âme du câble obtenue avec la CEI 60287 et avec des méthodes aux éléments finis**

| Méthode de calcul | Coefficient de convection<br>W/m <sup>2</sup> ·K |    |    |    |
|-------------------|--------------------------------------------------|----|----|----|
|                   | 2                                                | 5  | 20 | 80 |
| CEI 60287         | 70                                               | 70 | 70 | 70 |
| Éléments finis    | 95                                               | 81 | 72 | 69 |

Cet exemple montre que les différences de température calculées peuvent être très importantes. Dans cet exemple, le résultat CEI correspond à un coefficient de convection très élevé. Une brève discussion de la méthode de choix du coefficient de convection se trouve dans King et Halfter [24].





IEC 1717/03

**Figure 12 – Large cables located in a shallow through**

Table 2 shows the results obtained applying the IEC 60287 approach and the finite element method. Ambient temperature of 20°C is assumed.

**Table 2 – Conductor temperature of the middle cable obtained with the IEC 60287 and the finite element methods**

| Calculation method | Convection coefficient<br>$\text{W/m}^2\cdot\text{K}$ |    |    |    |
|--------------------|-------------------------------------------------------|----|----|----|
|                    | 2                                                     | 5  | 20 | 80 |
| IEC 60287          | 70                                                    | 70 | 70 | 70 |
| Finite element     | 95                                                    | 81 | 72 | 69 |

This demonstrates that the temperature differences can be quite substantial. In this example, the IEC result corresponds to a very high convection coefficient. A brief discussion on the selection of the convection coefficient can be found in King and Halfter [24].

## Annexe A

### Développement des équations

#### A.1 Equations de transfert de la chaleur

Lorsque la résistivité thermique est constante, l'équation de conduction de la chaleur dans un solide peut être écrite de la manière suivante:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + W_{\text{int}} \rho = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

où

- $\theta$  est la température inconnue (°C);
- $\delta = 1/\rho c$  est la diffusivité thermique du milieu (m<sup>2</sup>/s);
- $c$  est la chaleur spécifique volumique du matériau (J/m<sup>3</sup>);
- $\rho$  est la résistivité thermique du matériau (K·m/W);
- $W_{\text{int}}$  est le flux de chaleur émis par le câble (W/m).

Les conditions aux limites associées à l'équation A.1 peuvent s'exprimer sous deux formes différentes. Si la température est connue le long d'une partie de la frontière alors

$$\theta = \theta_B(s) \quad (\text{A.2})$$

où  $\theta_B$  est la température à la frontière, qui peut être une fonction de la longueur de la surface  $s$ . S'il y a une variation de la quantité de chaleur à la frontière en raison de la convection  $h(\theta - \theta_{\text{amb}})$  ou d'un flux de chaleur  $q$ , alors

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial n} + q + h(\theta - \theta_{\text{amb}}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

où  $n$  est la direction de la normale par rapport à la surface de la frontière,  $h$  est un coefficient de convection, et  $\theta$  la température limite inconnue.

Dans le calcul de la capacité de transport, la température de l'âme est généralement donnée et l'on recherche le courant maximal passant par le conducteur. Ainsi, lorsque les pertes de l'âme sont la seule source de chaleur au sein du câble, on trouve  $W_{\text{int}} = I^2 R$  et l'équation (A.1) sert à déterminer  $I$  compte tenu des conditions aux limites imposées.

Comme il a été dit précédemment, les problèmes rencontrés dans la résolution de l'équation (A.1) par la méthode analytique proviennent principalement de la difficulté du calcul de la répartition de la température dans le sol qui entoure le câble. Avec les méthodes analytiques employées dans la CEI 60287, le cas d'un groupe de câbles est traité par application du principe de superposition restreinte, en supposant que la présence d'un autre câble, même hors charge, ne perturbe pas le flux de la chaleur en provenance du premier câble, ni même la génération de chaleur dans celui-ci. Cela permet d'effectuer des calculs séparés pour chaque câble, l'échauffement final étant la somme algébrique de l'échauffement dû au câble lui-même et des échauffements provoqués par les autres câbles.

## Annex A

### Development of equations

#### A.1 Heat transfer equations

If the thermal resistance is constant, the heat conduction equation in a solid can be written as

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + W_{\text{int}} \rho = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

where

$\theta$  is the unknown temperature (°C);

$\delta = 1/\rho c$  is the thermal diffusivity of the medium (m<sup>2</sup>/s);

$c$  is the volumetric specific heat of the material (J/m<sup>3</sup>);

$\rho$  is the thermal resistivity of the material (K·m/W);

$W_{\text{int}}$  is the heat generation rate in the cable (W/m).

The boundary conditions associated with (A.1) can be expressed in two different forms. If the temperature is known along a portion of the boundary, then

$$\theta = \theta_B(s) \quad (\text{A.2})$$

where  $\theta_B$  is the boundary temperature that may be a function of the surface length  $s$ . If heat is gained or lost at the boundary due to convection  $h(\theta - \theta_{\text{amb}})$  or a heat flux  $q$ , then

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial n} + q + h(\theta - \theta_{\text{amb}}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

where  $n$  is the direction of the normal to the boundary surface,  $h$  is a convection coefficient, and  $\theta$  is an unknown boundary temperature.

In cable rating computation, the temperature of the conductor is usually given and the maximum current flowing in the conductor is sought. Thus, when the conductor heat loss is the only energy source in the cable, we have  $W_{\text{int}} = I^2 R$  and equation (A.1) is used to solve for  $I$  with the specified boundary conditions.

As mentioned earlier, the challenge in solving equation (A.1) analytically stems mostly from the difficulty of computing the temperature distribution in the soil surrounding the cable. In the analytical methods used in IEC 60287, the case of a group of cables is dealt with on the basis of the restricted application of superposition. This assumes that the presence of another cable, even if it is not loaded, does not disturb the heat flux path from the first cable, nor the generation of heat within it. This allows separate computations to be performed for each cable with the final temperature rise being an algebraic sum of the temperature rises due to cable itself and the rise caused by the other cables. Such a procedure is not theoretically correct and, for better precision, the temperature rise caused by simultaneous operation of all cables should be considered. Direct solution of the heat conduction equation employing numerical methods offers such a possibility.

Cette procédure n'est pas théoriquement correcte, et, pour une meilleure précision, il faudrait prendre en considération l'échauffement provoqué par l'exploitation simultanée de tous les câbles. La résolution directe de l'équation de conduction de la chaleur par l'emploi des méthodes numériques offre cette possibilité.

Les méthodes numériques permettent non seulement une meilleure représentation des effets d'échauffement réciproques, mais aussi une modélisation plus précise des frontières de la zone (par exemple la condition aux limites convective à la surface du sol, un flux de chaleur constant sur une frontière circulaire, pour les conduites de chaleur ou d'eau à proximité des câbles ou une frontière isotherme à fleur d'eau en fond de tranchée).

Dans la suite de cette annexe, on s'intéresse à la résolution des équations A.1 à A.3 par la méthode des éléments finis.

## A.2 Approximation des équations polynomiales

Pour cette introduction à la méthode des éléments finis et l'explication de son utilisation dans les calculs de capacité de transport des câbles, on utilisera la forme la plus simple et la plus répandue des éléments bidimensionnels, le triangle. Dans ce document, on emploiera donc indifféremment les mots triangle, élément et élément fini.

Prenons un élément simple triangulaire, comme illustré à la Figure A.1.

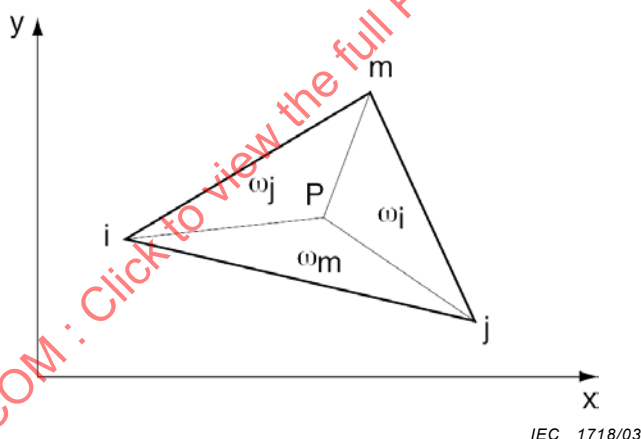


Figure A.1 – Coordonnées locales

Pour cet élément, la température  $\theta$  en un point quelconque à l'intérieur du triangle peut être spécifiée de manière unique, comme suit [15]:

$$\theta = A\omega_i + B\omega_j + C\omega_m \quad (\text{A.4})$$

où  $\omega_i, \omega_j$  et  $\omega_m$  sont les coordonnées locales définies à la Figure A.1. Ces coordonnées locales définissent de manière unique la position de tout point  $P$  à l'intérieur du triangle  $ijm$ . Pour déterminer la constante  $A$ , la température au nœud  $i$  est écrite (équation A.4)

$$\theta_i = 1 \times A + 0 \times B + 0 \times C$$

ce qui donne  $A = \theta_i$ . De même, pour les nœuds  $j$  et  $m$ , on obtient:  $B = \theta_j$  et  $C = \theta_m$ .

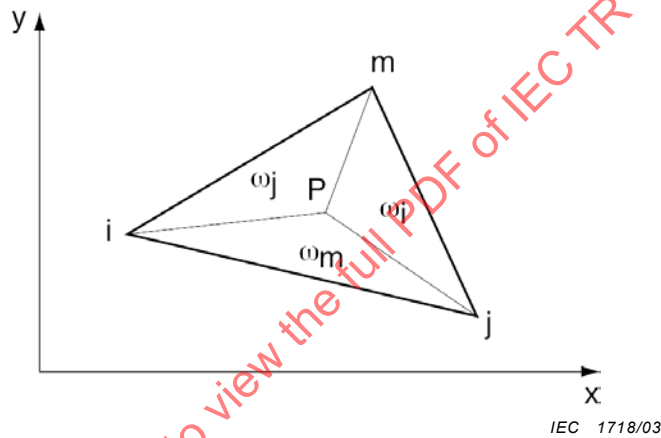
Numerical methods allow not only better representation of the mutual heating effects, but also permit more accurate modeling of the region's boundaries (e.g., a convective boundary at the earth surface, constant heat flux circular boundaries for heat or water pipes in the vicinity of the cables, or an isothermal boundary at the water level at the bottom of the trench).

In the reminder of this Annex, the solution to equations (A.1 – A.3) using the finite element method is developed.

## A.2 Approximating polynomials

For the purpose of introducing the method and explaining how it is used in cable rating computations, we will use the simplest and the most common shape for two-dimensional elements, the triangle. In this document, the words "triangle", "element" and "finite element" will be used interchangeably.

Consider a simple triangular element shown in Figure A.1.



**Figure A.1 – Area co-ordinates**

For this element, the temperature  $\theta$  at any point inside can be uniquely specified as [15]

$$\theta = A\omega_i + B\omega_j + C\omega_m \quad (\text{A.4})$$

where  $\omega_i$ ,  $\omega_j$  and  $\omega_m$  are the area co-ordinates defined as in Figure A.1. These area co-ordinates define uniquely the position of any point  $P$  inside the triangle  $ijm$ . To determine the constant  $A$ , the temperature at node  $i$  is written as (Eq. A.4)

$$\theta_i = 1 \times A + 0 \times B + 0 \times C$$

This gives  $A = \theta_i$ . Similarly, for nodes  $j$  and  $m$ , we obtain:  $B = \theta_j$  and  $C = \theta_m$ . Therefore,

Par conséquent:

$$\theta = \omega_i \theta_i + \omega_j \theta_j + \omega_m \theta_m = [\omega_i, \omega_j, \omega_m] \cdot \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_m \end{bmatrix} = N^e \cdot \Theta^e \quad (\text{A.5})$$

Dans l'hypothèse où les dérivées par rapport au temps sont, à tout instant, des fonctions prescrites des coordonnées d'espace, on peut, dans chaque élément, écrire la dérivée de la température par rapport au temps, comme suit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \omega_j \frac{\partial \theta_j}{\partial t} + \omega_m \frac{\partial \theta_m}{\partial t} = [\omega_i, \omega_j, \omega_m] \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_m}{\partial t} \end{bmatrix} = N^e \times \frac{\partial \Theta^e}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

puisque  $N^e$  est une fonction du système de coordonnées et non du temps.

La relation entre les coordonnées locales et les coordonnées cartésiennes est la suivante:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_m \end{bmatrix}$$

La relation inverse donne les coefficients du vecteur  $N^e$ :

$$\begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_m) & (x_m - x_j) & (x_j y_m - x_m y_j) \\ (y_m - y_i) & (x_i - x_m) & (x_m y_i - x_i y_m) \\ (y_i - y_j) & (x_j - x_i) & (x_i y_j - x_j y_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

où  $A$  est la superficie du triangle.

On observe, à partir des équations (A.5) et (A.7), que la température est une fonction linéaire en  $x$  et en  $y$ , ce qui signifie que les gradients dans les directions  $x$  ou  $y$  sont constants. Un gradient constant au sein de tout élément implique que de nombreux petits éléments doivent être utilisés pour approximer un changement rapide de la valeur de  $\theta$ .

### A.3 Equations de base de la méthode des éléments finis

Dans la section précédente on a appris comment calculer la température en tout point à l'intérieur d'un élément, dès lors que les valeurs de température aux nœuds sont connues. Pour obtenir les températures de nœud, on utilise une propriété, connue dans le calcul des variations, qui stipule que la minimisation de la fonctionnelle [25]

$$\chi = \int_s \frac{1}{2\rho} \left[ (\nabla \theta)^t \nabla \theta + \left( W_{\text{int}} - c \frac{d\theta}{dt} \right) \theta \right] dS + \int_c \left[ q\theta + \frac{1}{2} h(\theta - \theta_{\text{amb}})^2 \right] dC \quad (\text{A.8})$$

$$\theta = \omega_i \theta_i + \omega_j \theta_j + \omega_m \theta_m = [\omega_i, \omega_j, \omega_m] \cdot \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_m \end{bmatrix} = N^e \cdot \Theta^e \quad (\text{A.5})$$

Assuming that the time derivatives are prescribed functions of the space co-ordinates at any particular instant of time, we can write the time derivative for the temperature within each element as

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \omega_j \frac{\partial \theta_j}{\partial t} + \omega_m \frac{\partial \theta_m}{\partial t} = [\omega_i, \omega_j, \omega_m] \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_m}{\partial t} \end{bmatrix} = N^e \times \frac{\partial \Theta^e}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

since  $N^e$  is a function of the co-ordinate system and not the time.

The relationship between area co-ordinates and Cartesian co-ordinates is

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_m \end{bmatrix}$$

The inverse relationship yields the coefficients of vector  $N^e$ :

$$\begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_m) & (x_m - x_j) & (x_j y_m - x_m y_j) \\ (y_m - y_i) & (x_i - x_m) & (x_m y_i - x_i y_m) \\ (y_i - y_j) & (x_j - x_i) & (x_i y_j - x_j y_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

where  $A$  is the area of the triangle.

We can observe from equations (A.5) and (A.7) that the temperature is a linear function in  $x$  and  $y$ . This means that the gradients in either  $x$  or  $y$  directions are constant. A constant gradient within any element means that many small elements have to be used to approximate a rapid change in the value of  $\theta$ .

### A.3 Finite element equations

In the previous section we have learnt how to compute the temperature at any point inside an element if the temperature values at the nodes are known. To obtain node temperatures, we use a property, known in the variational calculus, that states that the minimisation of the functional [25]

$$\chi = \int_s \frac{1}{2\rho} \left[ (\nabla \theta)^t \nabla \theta + \left( W_{\text{int}} - c \frac{d\theta}{dt} \right) \theta \right] dS + \int_c \left[ q\theta + \frac{1}{2} h(\theta - \theta_{\text{amb}})^2 \right] dC \quad (\text{A.8})$$

sur la surface  $S$  délimitée par la courbe fermée  $C$ , lorsque le symbole en exposant  $t$  indique la transposition et

$$\nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

nécessite que l'équation différentielle (A.1) dans les conditions aux limites (A.2) et (A.3) soit satisfaite. Ainsi, toute répartition de la température pour laquelle  $\chi$  est minimal satisfait également les équations différentielles de départ, et ainsi représente une solution au problème étudié.

L'équation (A.8) est le point de départ de la détermination de la température à chaque nœud. On minimise (A.8) en utilisant l'ensemble des fonctions éléments, chacune étant définie pour un seul élément et écrite en termes de valeurs nodales. Les valeurs nodales  $\theta_n$  sont les valeurs inconnues de la formule. Ces valeurs sont obtenues en annulant les dérivés de  $\chi$  par rapport à chaque  $\theta_n$ .

Comme les fonctions  $\theta$  sont définies pour chaque élément individuel, les intégrales de (A.8) doivent être séparées en intégrales propres à chaque élément individualisé et les dérivées doivent être calculées pour chaque élément, soit:

$$\chi = \sum_{e=1}^E \chi^e \quad (\text{A.9})$$

où  $\chi^e$  est la fonctionnelle définie pour l'élément  $e$ , et  $E$  est le nombre total d'éléments.

Considérons d'abord un seul élément. Comme tout élément ne contribue qu'à trois éléments différentiels avec ses nœuds, ces contributions peuvent être répertoriées comme suit:

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta_n} \right)^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Les dérivées dans l'équation (A.10) ne peuvent être évaluées sans réécriture des intégrales de (A.8), en fonction des valeurs nodales,  $\theta^e$ . Cela se fait d'abord en calculant les dérivés de  $\theta$  par rapport à  $x$  et  $y$ . Seules deux des coordonnées de surface sont indépendantes. En faisant l'hypothèse qu'il s'agit de  $\omega_i$  et  $\omega_j$ , on a

$$\nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_m) & (y_m - y_i) \\ (x_m - x_j) & (x_i - x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$



over the area  $S$  bounded by the closed curve  $C$ , where the superscript  $t$  denotes transposition and

$$\nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

requires that the differential equation (A.1) with the boundary conditions (A.2) and (A.3) be satisfied. Therefore, any temperature distribution that makes  $\chi$  a minimum also satisfies the governing differential equations and therefore is a solution to the problem being studied.

Equation (A.8) is a starting point for determining the temperature at each node. We minimise (A.8) by using our set of element functions, each defined over a single element and written in terms of the nodal values. The nodal values  $\theta_n$  are the unknown values in our formulation. These values are obtained by taking derivatives of  $\chi$  with respect to each  $\theta_n$  and equating them to zero.

Recalling that functions  $\theta$  are defined over each individual element, the integrals in (A.8) must be separated into integrals over the individual elements and the derivatives computed for each element; that is

$$\chi = \sum_{e=1}^E \chi^e \quad (\text{A.9})$$

where  $\chi^e$  is the functional defined for element  $e$ , and  $E$  is the total number of elements.

Let us consider a single element first. As any element contributes to only three of the differentials associated with its nodes, these contributions can be listed as

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta_n} \right)^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

The derivatives in equation (A.10) cannot be evaluated until the integrals in (A.8) have been written in terms of the nodal values,  $\theta^e$ . This is done by first computing the derivatives of  $\theta$  with respect to  $x$  and  $y$ . Only two of the area co-ordinates are independent. Assuming that these are  $\omega_i$  and  $\omega_j$ , we have

$$\nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_m) & (y_m - y_i) \\ (x_m - x_j) & (x_i - x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

où le jacobien  $J$  est obtenu par différenciation de l'équation (A.7). Par ailleurs, à partir de l'équation (A.5) et en utilisant le fait que  $\omega_i + \omega_j + \omega_m = 1$ , on obtient ce qui suit:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_m \end{bmatrix} = V \Theta^e \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, pour un élément simple, on a

$$\nabla \theta = J \times V \times \Theta^e \quad (\text{A.13})$$

En appliquant (A.13) à (A.8), avec  $S$  et  $C$  correspondant à un seul élément, et en dérivant par rapport à  $\Theta^e$ , après quelques calculs simples mais fastidieux, l'équation (A.10) peut être écrite comme suit:

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta_n} \right)^e = h^e \Theta^e + q^e \frac{\partial \Theta^e}{\partial x} - k^e \quad (\text{A.14})$$

En désignant par  $d_{ij}$ ,  $d_{jm}$  et  $d_{mi}$  la distance entre les nœuds  $ij$ ,  $jm$  et  $mi$ , respectivement, la matrice des conductivités de l'élément est égale à

$$h^e = \frac{1}{4A\rho} \left\{ \begin{bmatrix} a_i^2 & a_i a_j & a_i a_m \\ a_i a_j & a_j^2 & a_j a_m \\ a_i a_m & a_j a_m & a_m^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_m \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_m \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m^2 \end{bmatrix} \right\} \\ + \frac{hd_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{hd_{jm}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{hd_{mi}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$a_i = x_m - x_j, a_j = x_i - x_m, a_m = x_j - x_i$$

$$b_i = y_j - y_m, b_j = y_m - y_i, b_m = y_i - y_j$$

S'il n'y a aucune limite convective le long des arêtes de l'élément, le terme correspondant de l'équation (A.15) est omis (exemple 3 ci-dessus).

La matrice de capacité de l'élément est donnée par

$$q^e = \frac{cA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

where the Jacobian  $J$  is obtained by differentiating equation (A.7). Further, from equation (A.5) and the fact that  $\omega_i + \omega_j + \omega_m = 1$ , we obtain

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_i} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_m \end{bmatrix} = V \Theta^e \quad (\text{A.12})$$

Thus, for a single element, we have

$$\nabla \theta = J \times V \times \Theta^e \quad (\text{A.13})$$

Substituting (A.13) into (A.8), with  $S$  and  $C$  corresponding to a single element, and differentiating with respect to  $\Theta^e$ , after some routine but tedious computations, equation (A.10) can be written as

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta_n} \right)^e = h^e \Theta^e + q^e \frac{\partial \Theta^e}{\partial t} - k^e \quad (\text{A.14})$$

Denoting by  $d_{ij}$ ,  $d_{jm}$  and  $d_{mi}$  the distance between nodes  $ij$ ,  $jm$  and  $mi$ , respectively, the element conductivity matrix is equal to

$$h^e = \frac{1}{4A\rho} \left\{ \begin{bmatrix} a_i^2 & a_i a_j & a_i a_m \\ a_i a_j & a_j^2 & a_j a_m \\ a_i a_m & a_j a_m & a_m^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_m \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_m \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m^2 \end{bmatrix} \right\} \\ + \frac{hd_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{hd_{jm}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{hd_{mi}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$a_i = x_m - x_j, a_j = x_i - x_m, a_m = x_j - x_i$$

$$b_i = y_j - y_m, b_j = y_m - y_i, b_m = y_i - y_j$$

If there is no convective boundary along any segment of the element, the relevant term in equation (A.15) is omitted (see example 3 above).

The element capacity matrix is given by

$$q^e = \frac{cA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

et le vecteur source de chaleur de l'élément est égal à

$$k^e = \frac{W_{\text{int}} A}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(h\theta_{\text{amb}} + q)d_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(h\theta_{\text{amb}} + q)d_{jm}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(h\theta_{\text{amb}} + q)d_{mi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Ici encore, les trois derniers termes s'appliquent en fonction de la condition aux limites existant le long de la frontière de l'élément. Le facteur  $W_{\text{int}} A$  représente la totalité de la chaleur en W/m produite dans l'élément.

En effectuant les calculs donnés par les équations (A.14-A.17) pour chaque élément, on obtient finalement l'ensemble suivant d'équations algébriques linéaires pour la région entière:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \sum_{e=1}^E \left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta_n} \right)^e = H\theta + Q \frac{\partial \theta}{\partial t} - K = 0 \quad (\text{A.18})$$

Dans cette équation  $H$  est la matrice des conductivités thermiques,  $Q$  la matrice des capacités thermiques,  $\theta$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  sont les vecteurs qui contiennent les températures nodales et leurs dérivées,  $K$  est le vecteur qui exprime la répartition des sources et des puits de chaleur dans la région étudiée.

Dans l'analyse du régime permanent, l'équation (A.18) se réduit à la suivante:

$$H\theta - K = 0 \quad (\text{A.19})$$

Le système d'équations différentielles (A.18) qui traduit le problème discrétisé peut être résolu en utilisant un des nombreux schémas récursifs disponibles. Deux procédures sont largement utilisées pour résoudre ces équations et obtenir les valeurs de  $\theta$  à chaque instant. La première consiste à faire une approximation de la dérivée par rapport au temps en utilisant un schéma type de différences finies. La procédure alternative est d'utiliser des éléments finis définis dans le domaine temporel. Flatabo [15] a utilisé l'algorithme des différences finies Crank-Nicolson à mi-intervalle pour la solution de cette équation. Cette méthode demande une itération à chaque pas de temps. Ici on propose d'utiliser le schéma de pas de temps à trois niveaux de Lees [26] dans lequel l'équation discrétisée est remplacée par la relation de récurrence suivante:

$$\theta^{n+1} = - \left[ \frac{H^n}{3} + \frac{Q^n}{2\Delta\tau} \right]^{-1} \left[ \frac{H^n \theta^n}{3} + \frac{H^n \theta^{n-1}}{3} - \frac{Q^n \theta^{n-1}}{2\Delta\tau} - K^n \right] \quad (\text{A.20})$$

où le terme en exposant  $n$  se réfère à l'intervalle de temps et  $\Delta\tau$  au pas de temps. Cette procédure est toujours stable et présente l'avantage de fournir la solution au niveau de temps  $n+1$  sans demander une quelconque itération, puisque les matrices de coefficient sont évaluées pour le niveau  $n$ . Les conditions initiales doivent être spécifiées et la première itération de pas de temps est effectuée à l'aide d'une version modifiée de (A.20) qui ne requière que la solution pour le pas de temps précédent.

and the element heat generation vector is equal to

$$k^e = \frac{W_{\text{int}} A}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(h\theta_{\text{amb}} + q)d_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(h\theta_{\text{amb}} + q)d_{jm}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(h\theta_{\text{amb}} + q)d_{mi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Here again, the last three terms apply only if the appropriate boundary exists along the element edge. Factor  $W_{\text{int}} A$  represents the total heat in W/m generated in the element.

Performing computations given by equations (A.14-A.17) for each element, we finally obtain the following set of linear algebraic equations for the whole region:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \sum_{e=1}^E \left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta_n} \right)^e = H \theta + Q \frac{\partial \theta}{\partial t} - K = 0 \quad (\text{A.18})$$

In this equation,  $H$  is the heat conductivity matrix,  $Q$  the heat capacity matrix,  $\theta$  and  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  are vectors containing the nodal temperatures and their derivatives,  $K$  is a vector which expresses the distribution of heat sources and heat sinks over the region under consideration.

In the steady state analysis, equation (A.18) simplifies to:

$$H \theta - K = 0 \quad (\text{A.19})$$

The set of ordinary differential equations (A.18) which define the discretised problem can be solved using one of the many recursion schemes. There are two popular procedures for solving these equations to obtain the values of  $\theta$  at each point in time. The first is to approximate the time derivative using a finite difference scheme. The alternate procedure is to use finite elements defined in the time domain. Flatabo [15] used the mid-interval Crank-Nicolson finite difference algorithm for the solution of this equation. This method requires an iteration within each time step. Here, we propose to use Lees' [26] three-level, time-stepping scheme in which the discretised equation is replaced by the recurrence relationship

$$\theta^{n+1} = - \left[ \frac{H^n}{3} + \frac{Q^n}{2\Delta\tau} \right]^{-1} \left[ \frac{H^n \theta^n}{3} + \frac{H^n \theta^{n-1}}{3} - \frac{Q^n \theta^{n-1}}{2\Delta\tau} - K^n \right] \quad (\text{A.20})$$

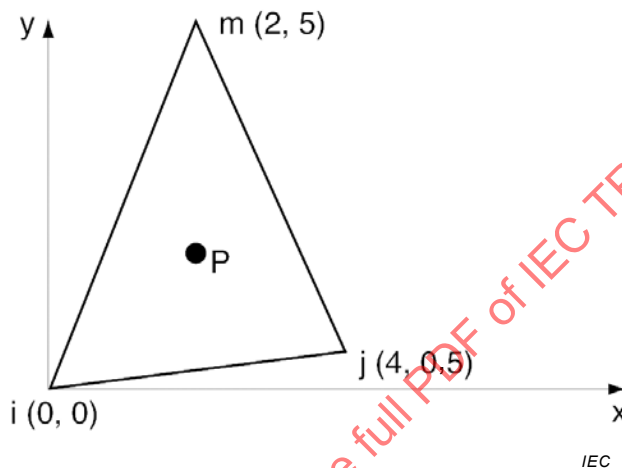
where the superscript  $n$  refers to the time level and  $\Delta\tau$  is the time step. The procedure is unconditionally stable and has the advantage of producing the solution at time level  $n+1$  without the need for any iteration as the coefficient matrices are evaluated at level  $n$ . The initial conditions have to be specified and the first time step iteration is performed by a modified version of equation (A.20) requiring only one previous time step solution.

## A.4 Exemples

Les exemples suivants illustrent comment la méthode des éléments finis est mise en œuvre pour la résolution d'un problème de conduction de chaleur.

### A.4.1 Exemple A1

Considérons un élément triangulaire illustré par la Figure A.2. On évaluera l'équation caractéristique de l'élément et on calculera la valeur de la température au point  $P$  pour les valeurs de température nodales:  $\theta_i = 40^\circ\text{C}$ ,  $\theta_j = 34^\circ\text{C}$  et  $\theta_m = 46^\circ\text{C}$ .  $P$  est situé à  $(2,0,1,5)$ .



IEC 1719/03

Figure A.2 – Illustration de l'exemple A1

La température  $\theta$  est donnée par l'équation (A.5) de cette annexe avec la fonction de forme décrite par l'équation (A.7). On doit d'abord calculer la superficie du triangle qui s'obtient comme suit:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0,5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

A partir de l'équation (A.7):

$$\begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_m \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} (0,5-5) & (2-4) & (4 \times 5 - 2 \times 0,5) \\ (5-0) & (0-2) & (2 \times 0 - 0 \times 5) \\ (0-0,5) & (4-0) & (0 \times 0,5 - 4 \times 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,368 \\ 0,368 \\ 0,264 \end{bmatrix}$$

La température au point  $P$  est obtenue à partir de l'équation (A.5):

$$\theta = 0,368 \times 40 + 0,358 \times 34 + 0,264 \times 46 = 39,4^\circ\text{C}$$

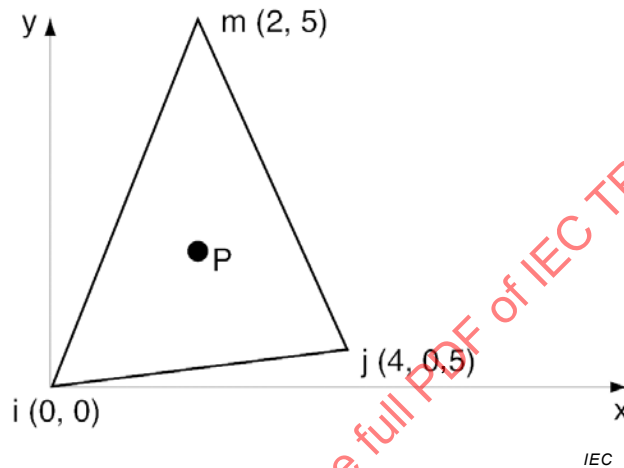
Dans des éléments triangulaires, la température varie linéairement entre deux nœuds. Toute ligne à température constante est une droite qui coupe deux côtés de l'élément. La seule exception est lorsque tous les nœuds ont la même valeur. Ces deux propriétés facilitent le tracé des isothermes.

## A.4 Examples

The following examples illustrate how the finite element method is implemented for the solution of a heat conduction problem.

### A.4.1 Example A1

Consider a triangular element shown in Figure A.2. We will evaluate the element equation and calculate the value of the temperature at point  $P$  for the following nodal temperature values:  $\theta_i = 40^\circ\text{C}$ ,  $\theta_j = 34^\circ\text{C}$  and  $\theta_m = 46^\circ\text{C}$ .  $P$  is located at  $(2,0, 1,5)$ .



**Figure A.2 – Illustration for example A1**

The temperature  $\theta$  is given by equation (A.5) in this Annex with the shape function described by equation (A.7). First, we need to compute the area of the triangle. This is obtained from

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0,5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

From equation (A.7),

$$\begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_m \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} (0,5-5) & (2-4) & (4 \times 5 - 2 \times 0,5) \\ (5-0) & (0-2) & (2 \times 0 - 0 \times 5) \\ (0-0,5) & (4-0) & (0 \times 0,5 - 4 \times 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,368 \\ 0,368 \\ 0,264 \end{bmatrix}$$

The temperature at point  $P$  is obtained from equation (A.5):

$$\theta = 0,368 \times 40 + 0,358 \times 34 + 0,264 \times 46 = 39,4^\circ\text{C}$$

In triangular elements, temperature varies linearly between any two nodes. Any line of constant temperature is a straight line and intersects two sides of the element. The only exception is when all nodes have the same value. These two properties make it easy to locate isothermal contour lines.

#### A.4.2 Exemple A2

On détermine l'isotherme 41°C pour l'élément triangulaire utilisé dans l'exemple A1.

L'isotherme 41°C coupe les côtés *im* et *mj*. Les coordonnées des intersections de cette isotherme avec les côtés du triangle sont obtenues à partir des rapports simples suivants:

$$\frac{46 - 41}{46 - 34} = \frac{2 - x}{2 - 4} \text{ ou } x = 2,83$$

et

$$\frac{46 - 41}{46 - 34} = \frac{5 - y}{5 - 0,5} \text{ ou } y = 3,12$$

L'isotherme est représentée à la Figure A.3.

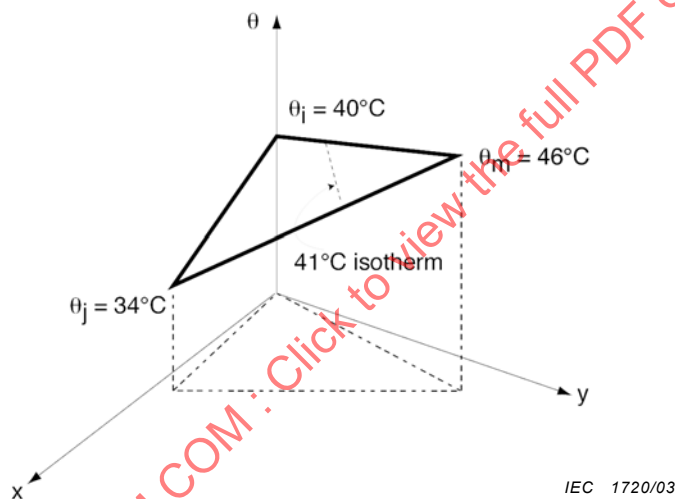


Figure A.3 – Isotherme 41°C

#### A.4.3 Exemple A3

Considérons l'élément examiné dans l'exemple A1. On fait l'hypothèse que cet élément est soumis à un effet de convection sur la surface *ij* et à un flux de chaleur constant sur la surface *mi*. On calcule les matrices de l'élément, pour les valeurs numériques des dimensions montrées à la Figure A.4.



#### A.4.2 Example A2

We will determine the 41°C contour line for the triangular element used in example A1.

The temperature isotherm for 41°C intersects sides *im* and *mj*. The coordinates at which this isotherm intersects the sides of the triangle are obtained from the following simple ratios:

$$\frac{46 - 41}{46 - 34} = \frac{2 - x}{2 - 4} \quad \text{or} \quad x = 2,83$$

and

$$\frac{46 - 41}{46 - 34} = \frac{5 - y}{5 - 0,5} \quad \text{or} \quad y = 3,12$$

The contour is shown in Figure A.3.

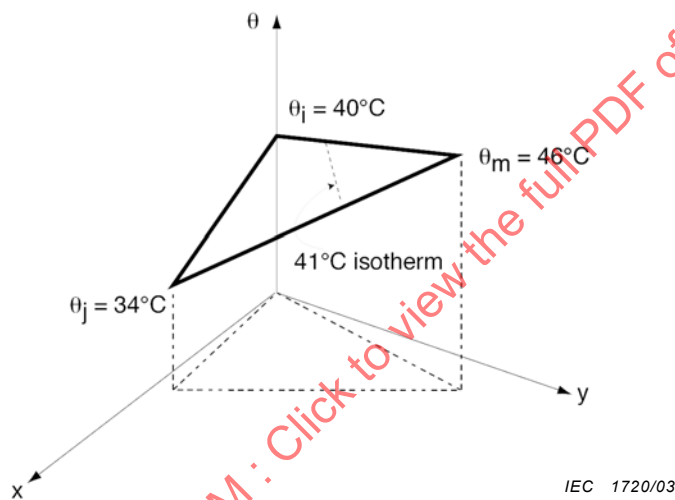


Figure A.3 – 41°C isothermal contour

#### A.4.3 Example A3

Consider the element examined in example A1. Assume that this element experiences convection on surface *ij* and a constant heat flux on surface *mi*. We will calculate element matrices given the numerical dimensions and properties shown in Figure A.4.